Matemática

Bloque 3: Análisis Matemático

Clase 19 – Martes 15 de agosto

FCAyF Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

Clase	Semana	Tema de la Semana	Práctica
19	14-ago	Tema 10: Funciones. Introducción	Trabajo Práctico N°8: Funciones - Parte 1
20	21-ago	Tema 10: Funciones: exponencial y logarítmica	Trabajo Práctico N°8: Funciones - Parte 1
21	28-ago	Tema 10: Funciones: trigonométricas	Trabajo Práctico N°8: Funciones - Parte 2

Funciones

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

- Función
- Dominio
- Gráfica
- Imagen
- Tipos de funciones

Función

Dados A y B dos conjuntos

Una **función de A en B** es una relación que asigna a cada elemento de A un único elemento de B

Función

Dados A y B dos conjuntos de **números reales**

Una **función de A en B** es una relación que asigna a cada **número** de A un único **número** de B

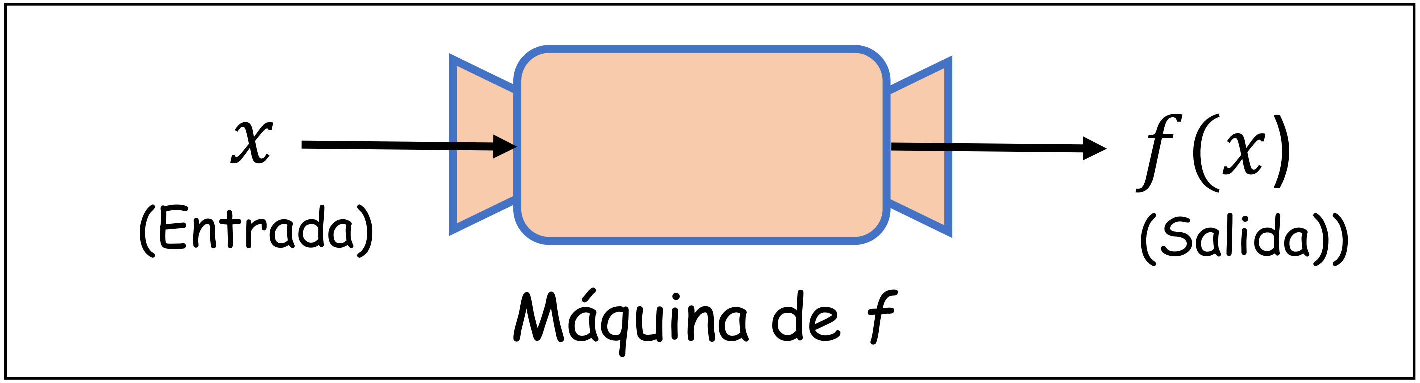



Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

- ✓ La altura en función de la edad.
- ✓ La temperatura en función de la fecha.
- ✓ El número de bacterias en un cultivo en función del tiempo.
- ✓ El área de un círculo en función de su radio.
- ✓ La producción de manzanas en función de la cantidad de árboles por hectárea.

El concepto de **función** es útil para modelar el mundo real

Existen distintas maneras de expresar una **función**

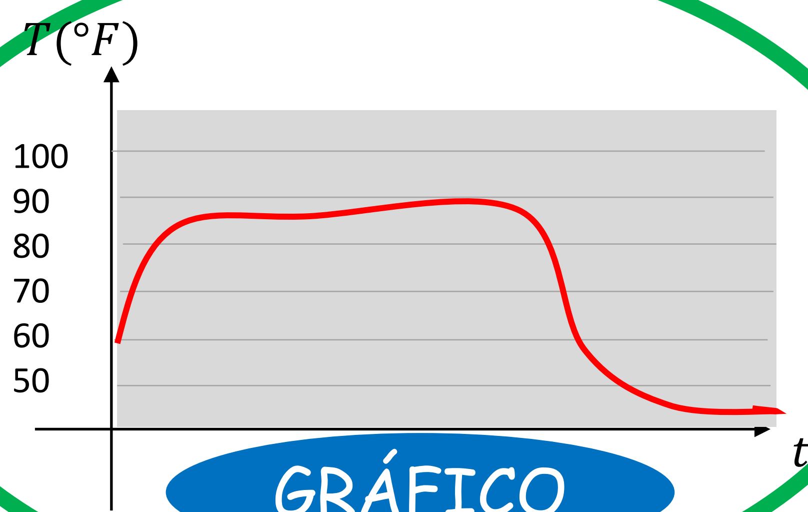
Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

La altura en función de la edad

TEXTO

Tiempo (t)	Distancia (d(t))
0	0
1	16
2	64
3	144
4	256

TABLA



GRÁFICO

$$A(r) = \pi r^2$$

FÓRMULA

¿Cómo vamos a anotar las funciones?

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

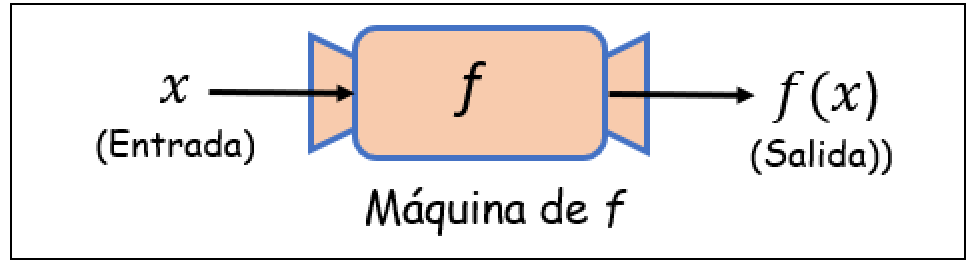
Escribimos $f\colon A \to B$ para indicar que f ***es una función de*** $\boldsymbol{A}$ ***en*** $\boldsymbol{B}$

Dado $x \in A$, el elemento de B que la función f le hace corresponder a x se denota $f(x)$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{f\colon A \to B} \\ \boldsymbol{x \to f(x)} \end{array}}$$

Variable independiente

Variable dependiente



$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x^2$$

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

$$m(x) = \sqrt{x}$$

El área de un círculo en función de su radio: $A(r) = \pi r^2$

Determinar:

$f(-2)$

$f(3)$

$f(a)$

$f(a-2)$

$m(1)$

$m(8)$

$m(h^2+1)$

$A(2)$

Dominio

Dada $f\colon A \to B$, se llama ***Dominio de f*** al conjunto de todos los números x para los cuales tiene sentido calcular $f(x)$.

Escribimos $Dom(f)$ al conjunto dominio de la función.

Considerando $f\colon A \to B$ diremos que

$$A = Dom(f)$$

¿Cuál sería el dominio de estas funciones?

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x^2$$

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

$$m(x) = \sqrt{x}$$

RESTRICCIONES ALGEBRAICAS

¿El dominio de esta función?

El área de un círculo en función de su radio

$$A(r) = \pi r^2$$

RESTRICCIONES DEL CONTEXTO

Gráfica

La gráfica de una función $f\colon Dom(f) \to B$ es el conjunto de puntos del plano de coordenadas $(x, f(x))$ con $x \in Dom(f)$

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

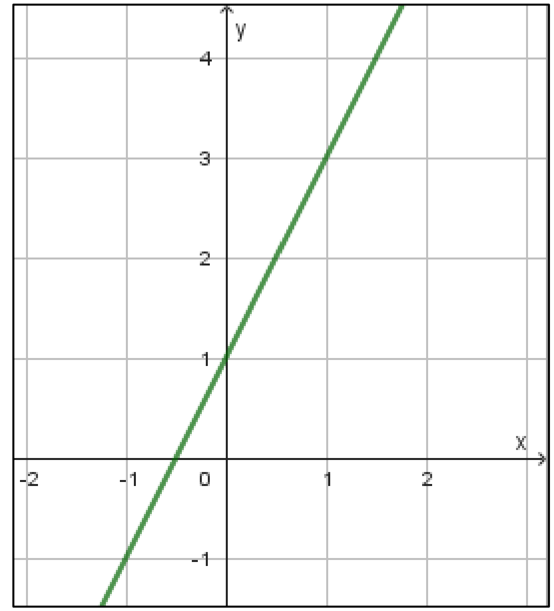
Para graficar hacemos
$y = f(x)$

¿Cuáles son las gráficas de estas funciones?

$$f(x) = 2x + 1$$

$$Dom\ (f) = \mathcal{R}$$

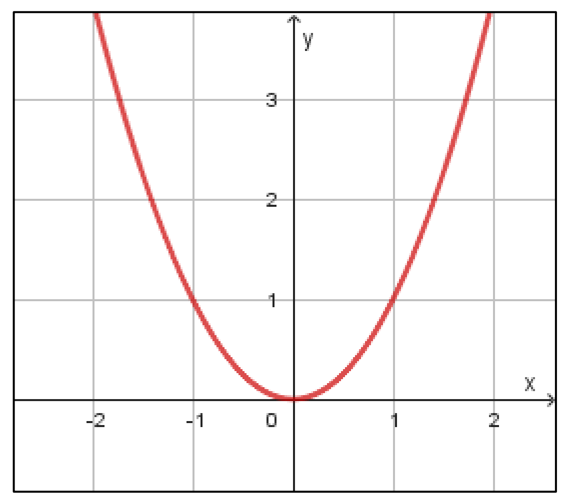
$$y = 2x + 1$$



$$g(x) = x^2$$

$$Dom\ (g) = \mathcal{R}$$

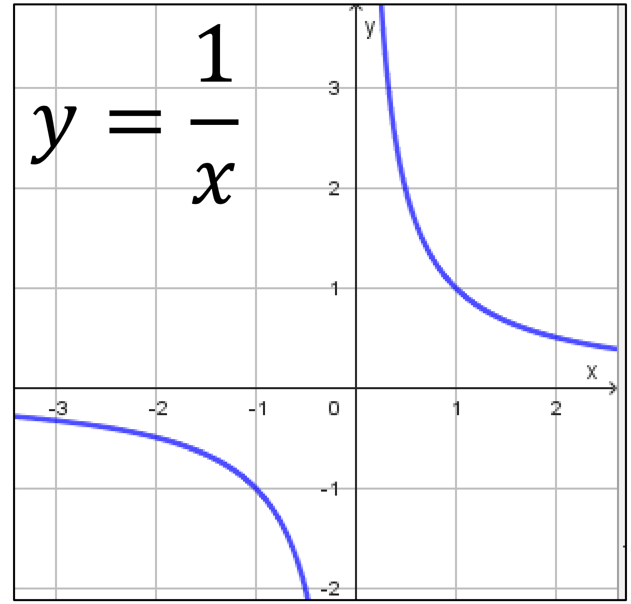
$$y = x^2$$



¿Cuáles son las gráficas de estas funciones?

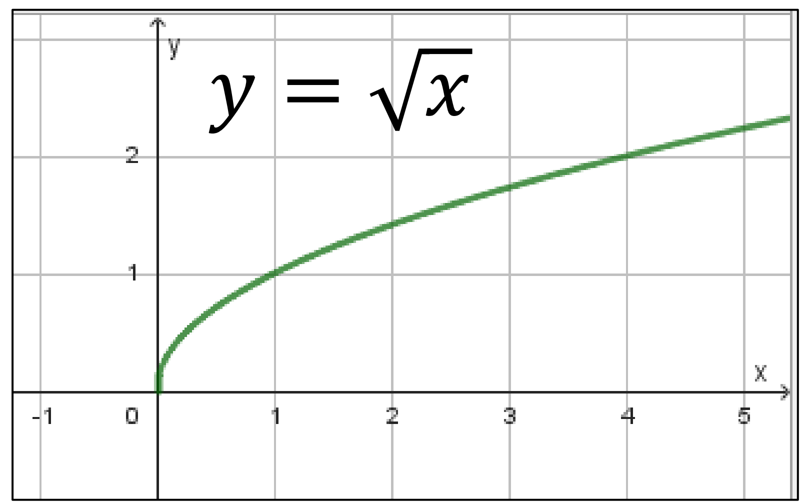
$$h(x) = \frac{1}{x}$$

$$Dom\ (h) = \mathcal{R} - \{0\}$$

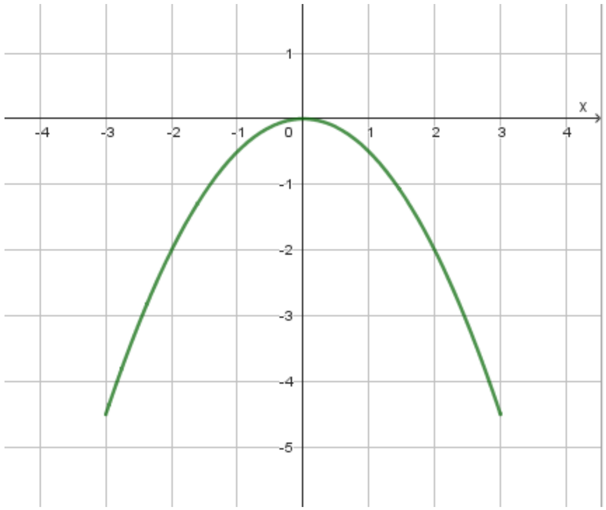


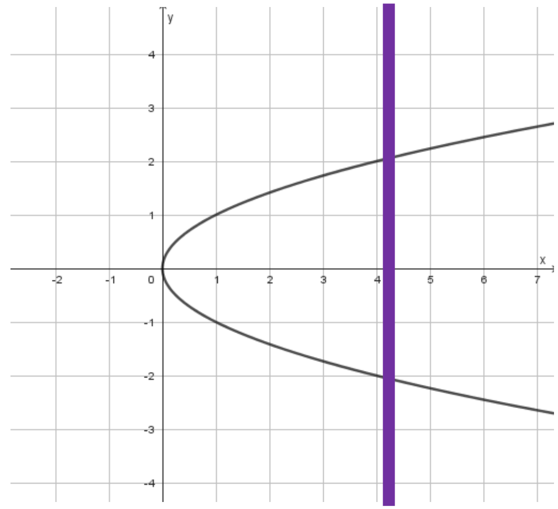
$$m(x) = \sqrt{x}$$

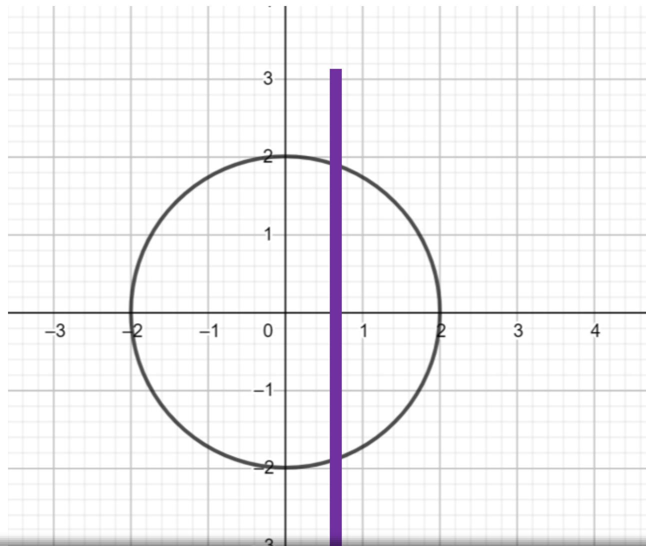
$$Dom\ (m) = [0, \infty)$$

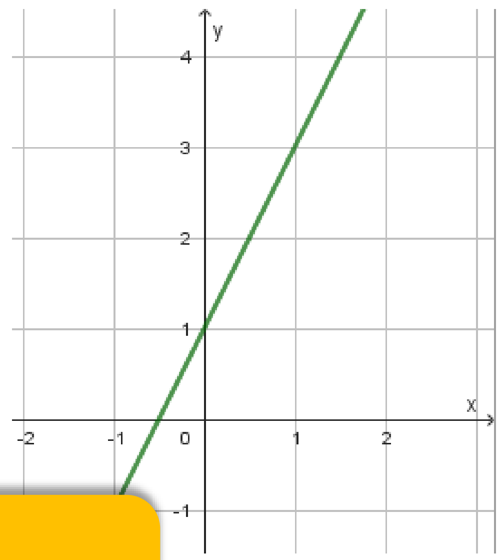


¿Cómo podemos darnos cuenta si una curva corresponde a la gráfica de una función?









REGLA DE LA RECTA VERTICAL

¿Son funciones? ¿Qué les parece? ¿Cumplen con la definición?

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x + y^2 = 4$$

Imagen

Dada $f: A = Dom(f) \rightarrow B$, se llama ***imagen de f*** al conjunto de los valores que toma la función f para cada x perteneciente al dominio.

Escribimos $Im(f)$ al conjunto imagen de la función.

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

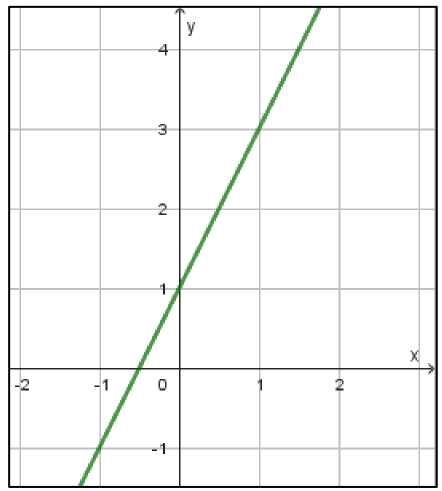
Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

¿Cuál sería la imagen de estas funciones?

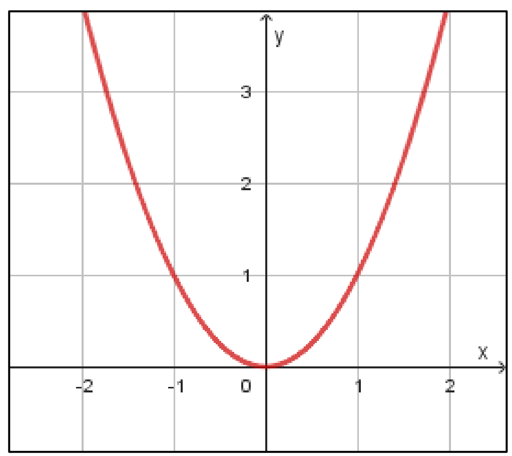
LA DETERMINAMOS CON LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN

$$f(x) = 2x + 1$$
$$Dom\ (f) = \mathcal{R}$$
$$Im\ (f) = \mathcal{R}$$



$$y = 2x + 1$$

$$g(x) = x^2$$
$$Dom\ (g) = \mathcal{R}$$
$$Im\ (g) = [0, +\infty)$$



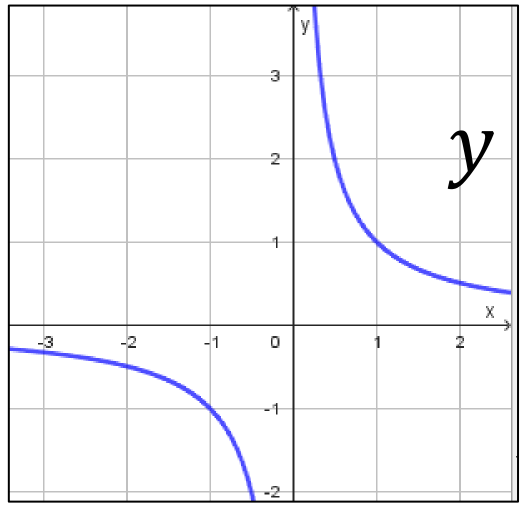
$$y = x^2$$

¿Cuál sería la imagen de estas funciones?

LA DETERMINAMOS CON LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

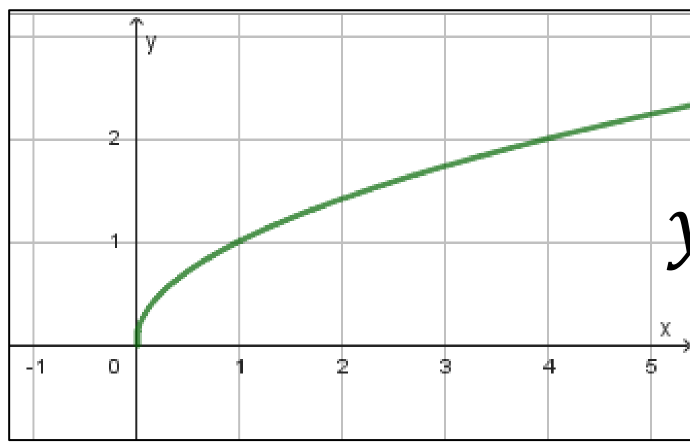
$$Dom\ (h) = \mathcal{R} - \{0\}$$



$$y = \frac{1}{x}$$

$$m(x) = \sqrt{x}$$

$$Dom\ (m) = [0, \infty)$$

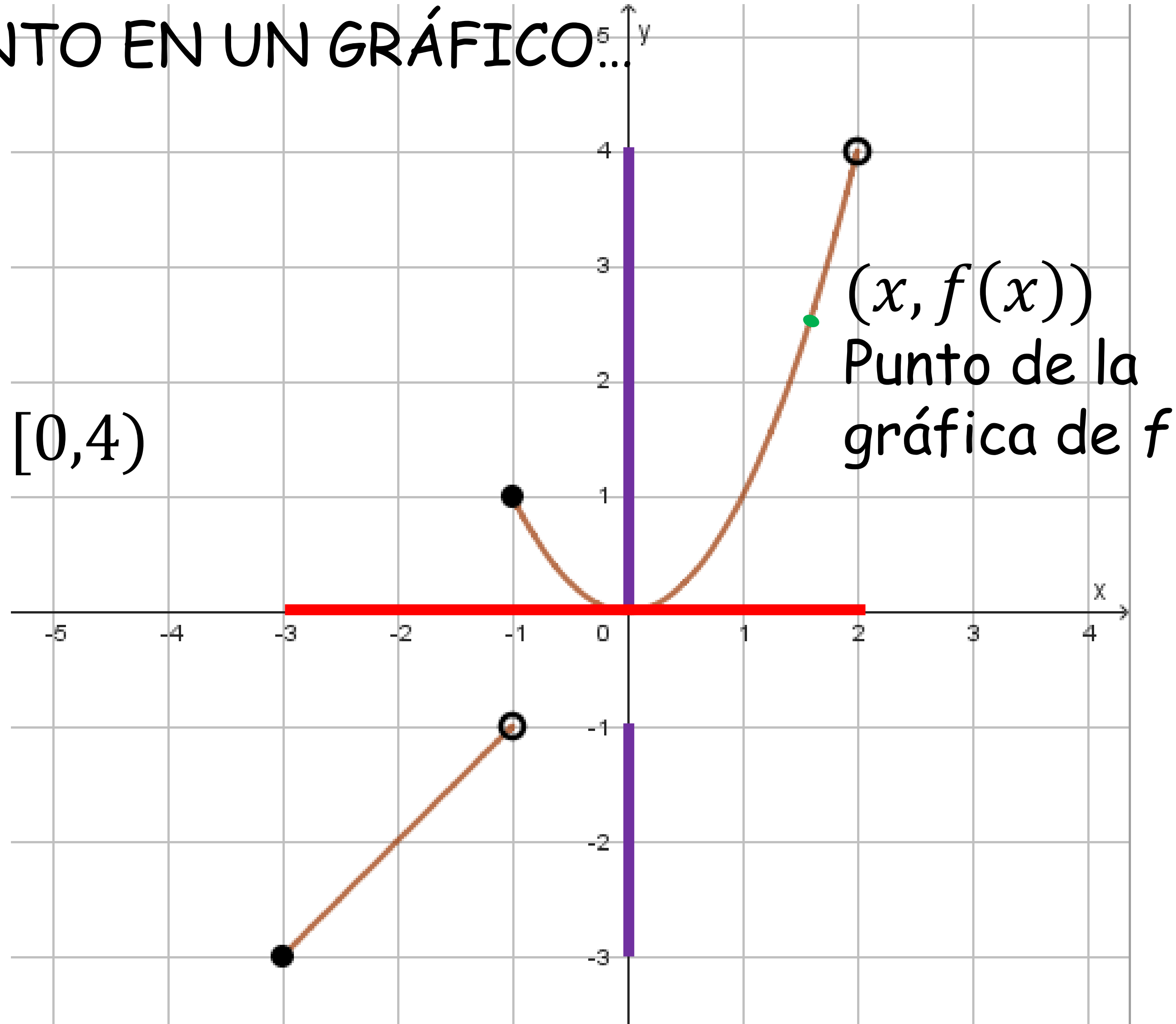


$$y = \sqrt{x}$$

Entonces…TODO JUNTO EN UN GRÁFICO…

$$Dom\ (f) = [-3,2)$$

$$Im\ (f) = [-3,-1) \cup [0,4)$$



Determinar f(-1), f(-2) y f(3/2).
¿Cuánto vale x para que f(x)=1?, ¿y para que f(x)=-2?, ¿y para qué f(x)=-1/2)?

¡Vamos a ver distintos tipos de funciones!!!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

- Polinómicas
- Racionales
- Algebraicas (otras)
- Exponencial
- Logaritmo natural
- Trigonométricas
- A trozos

Polinómicas

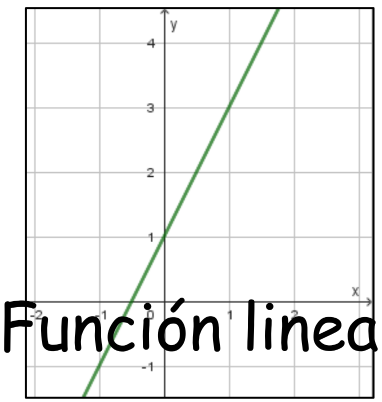
Son funciones de la forma $p(x) = a_n x^n + a^{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$, donde $a_i \in \mathcal{R}$ con $i = 0, \ldots, n$ números naturales.

EJEMPLOS

$f(x) = 2x + 1$

$Dom\ (f) = \mathcal{R}$

$Im\ (f) = \mathcal{R}$



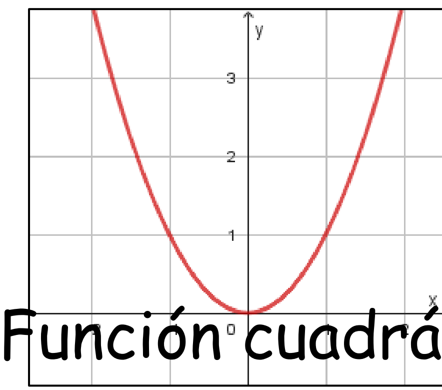
Función lineal

$y = 2x + 1$ Ecuación de una recta

$g(x) = x^2$

$Dom\ (g) = \mathcal{R}$

$Im\ (g) = [0, \infty)$



Función cuadrática

$y = x^2$ Ecuación de una parábola

EL DOMINIO DE TODAS LAS FUNCIONES POLINÓMICAS SON LOS NÚMEROS REALES

Racionales

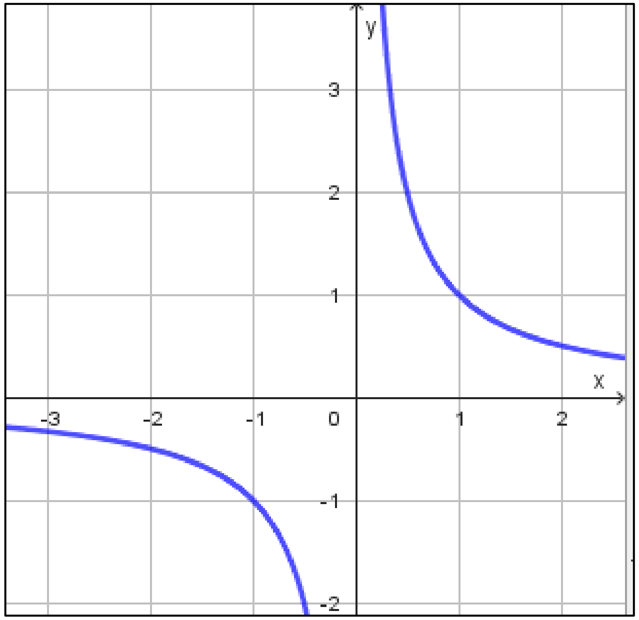
Son funciones de la forma $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son funciones polinómicas y $q(x) \neq 0$.

EJEMPLO

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

$$Dom\ (h) = \mathcal{R} - \{0\}$$

$$Im\ (h) = \mathcal{R} - \{0\}$$



$$y = \frac{1}{x} \qquad yx = 1$$

Ecuación de una hipérbola

Otras Algebraicas

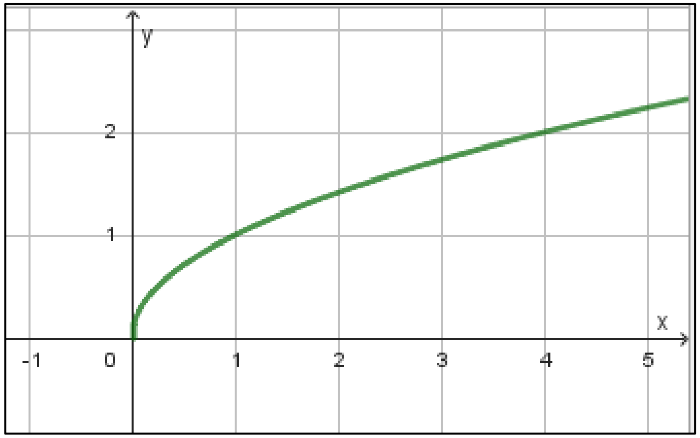
Son funciones originadas a partir de realizar operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación) sobre la variable independiente.

EJEMPLO

$$m(x) = \sqrt{x}$$

$$Dom\ (m) = [0, \infty)$$

$$Im\ (m) = [0, \infty)$$



$$y = \sqrt{x} \qquad\qquad y^2 = x$$

Ecuación de una rama de una parábola horizontal

¡Hagamos algunos ejercicios para practicar lo que vimos!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplos:

- ✓ Dada $f(x) = x^2 - 3$. ¿Cuánto es $f(-2)$? ¿Para qué valor de x es $f(x) = 1$?
- ✓ Determinar el dominio de $g(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$.
- ✓ Determinar el dominio de $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Graficar la función y determinar la imagen.

Imagen
de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplos:

- ✓ Dada la gráfica siguiente, determinar el dominio y la imagen:

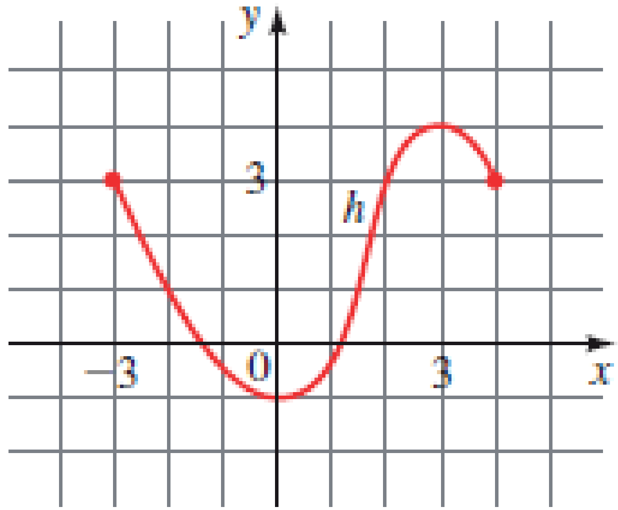
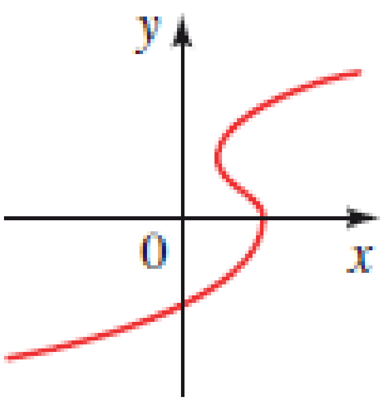
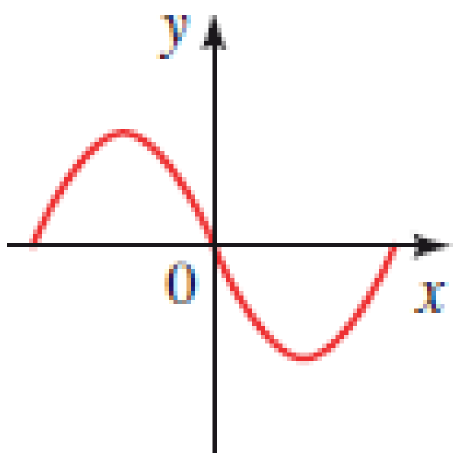


Imagen
de 3dman_eu en Pixabay

- ✓ ¿Corresponden a gráficas de funciones?





Matemática

Clase 20 – Martes 22/8

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

Clase	Semana	Tema de la Semana	Práctica
19	14-ago	Tema 10: Funciones. Introducción	Trabajo Práctico N°8: Funciones - Parte 1
20	21-ago	Tema 10: Funciones: exponencial y logarítmica	Trabajo Práctico N°8: Funciones - Parte 1
21	28-ago	Tema 10: Funciones: trigonométricas	Trabajo Práctico N°8: Funciones - Parte 2

Funciones

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

- Función
- Dominio
- Imagen
- Gráfica
- Tipos de funciones

¡¡Seguimos con esto!!

Ya vimos algunas...

- Polinómicas
- Racionales
- Algebraicas
- Exponencial
- Logaritmo natural
- Trigonométricas
- A trozos

¡¡Seguimos a partir de acá!!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Función exponencial

La leyenda del tablero de ajedrez y los granos de trigo

Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Sheram.

En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso le dejó profundamente entristecido. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un buen día un tal Sissa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo: ***el ajedrez***.

Función exponencial

Sissa le entregó un tablero con sus piezas y le enseño a jugar. Comenzaron a jugar y el rey se sintió maravillado: ***su pena desapareció en gran parte***.

El rey agradecido le dijo a Sissa que como recompensa ***pidiera lo que deseara***.

Sissa le pidió como regalo “algunos” granos de trigo… pero ¿cuántos?

Función exponencial

Pidió: ***un grano de trigo*** por la primera casilla del tablero del ajedrez,
2 granos de trigo por la segunda,
4 granos de trigo por la tercera,
8 granos de trigo por la cuarta,
16 granos de trigo por la quinta,
32 granos de trigo por la sexta y así sucesivamente ……

El rey en un principio se ofendió porque pensó que estaba despreciando su generosidad pidiendo algo tan simple.

Función exponencial

El rey le pidió a los matemáticos del que calculen cuántos granos de trigo debían entregarle a Sissa y se lo dieran.

La conclusión fue que era imposible cumplir semejante deseo. *En todos los graneros del reino no existía la cantidad de trigo que exigía Sissa. Hasta los graneros del mundo entero eran insuficientes*

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Pero … ¿Cuántos granos son?
No parecen tanto…

Función exponencial

Veamos

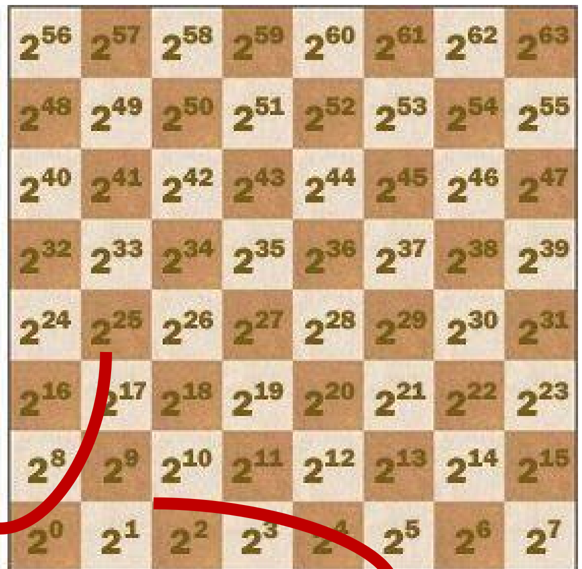


Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$2^9 \; granos = 512 \; granos$$

$$2^{25} \; granos = 33.554.432 \; granos$$

¿Hacemos la cuenta?

$$Total = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \cdots$$
$$= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \cdots + 2^{63}$$
$$= 18.446.744.073.709.551.615 \text{ granos de trigo}$$

¿Cuánto trigo es?

25.000 granos de trigo → 1 kg de trigo

18.446.744.073.709.551.615 granos

737.869.762.948.382 Kg o

737.869.762.948 Tn

La estimación de producción de trigo para la cosecha 2013-2014 fue de:

Unión Europea	142 896 000 Tm
China	121 000 000 Tm
India	92 460 000 Tm
Estados Unidos	57 536 000 Tm
Rusia	54 000 000 Tm
Canadá	31 500 000 Tm
Australia	25 500 000 Tm
Pakistán	24 000 000 Tm
Ucrania	22 000 000 Tm
Turquía	18 000 000 Tm
Kazajstán	17 000 000 Tm
Irán	14 500 000 Tm
Argentina	12 000 000 Tm
Egipto	8 800 000 Tm
Marruecos	7 000 000 Tm
Uzbekistán	6 700 000 Tm
Otros	53 999 000 Tm
TOTAL	708 891 000 Tm

Sería necesarias las cosechas mundiales de aproximadamente 1044 años para juntar esa cantidad de trigo.

Imagen de [Syaibatul Hamdi](#) en [Pixabay](#)

$$\frac{737.869.762.948\,Tm}{708.891.000\,Tm/\,año} \simeq 1.044\ años$$

Función exponencial

El número de granos de trigo para cada casillero crece muy rápido porque sigue una ley exponencial.

Es decir:

Si definimos una función de modelice la cantidad de granos de trigo correspondientes a cada casilla, definiendo la variable x como cada una de las casillas y la función $f(x)$ como la cantidad de granos de trigo correspondiente a la misma. Entonces:

$$\boldsymbol{f(x) = 2^x}$$

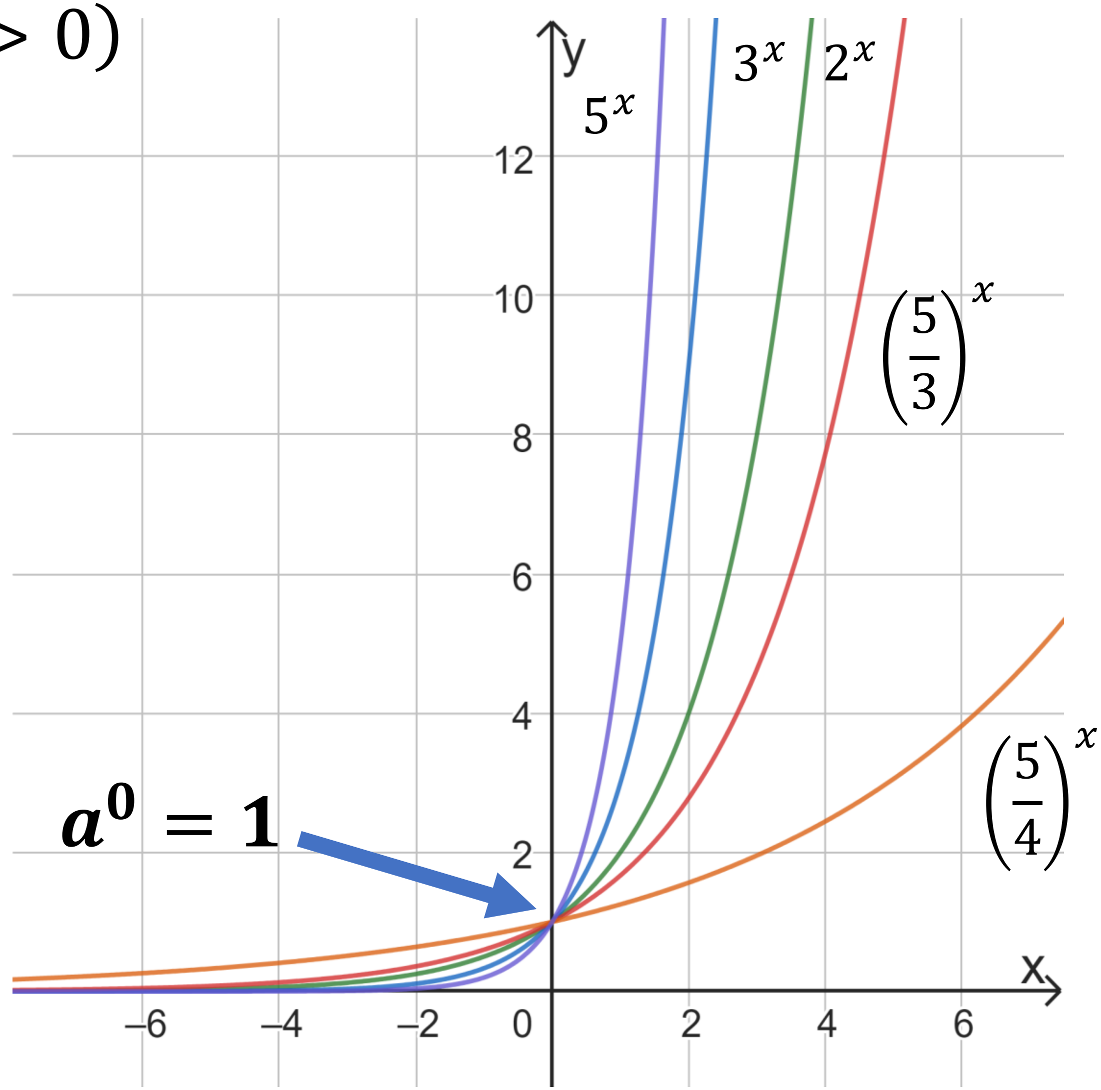
Funciones exponenciales

$$\boldsymbol{f(x) = a^x} \quad (a \in \mathcal{R}; a > 0)$$

$$Dom\ f = \mathcal{R}$$

$$Im\ f = (0, \infty)$$

$$a > 1$$



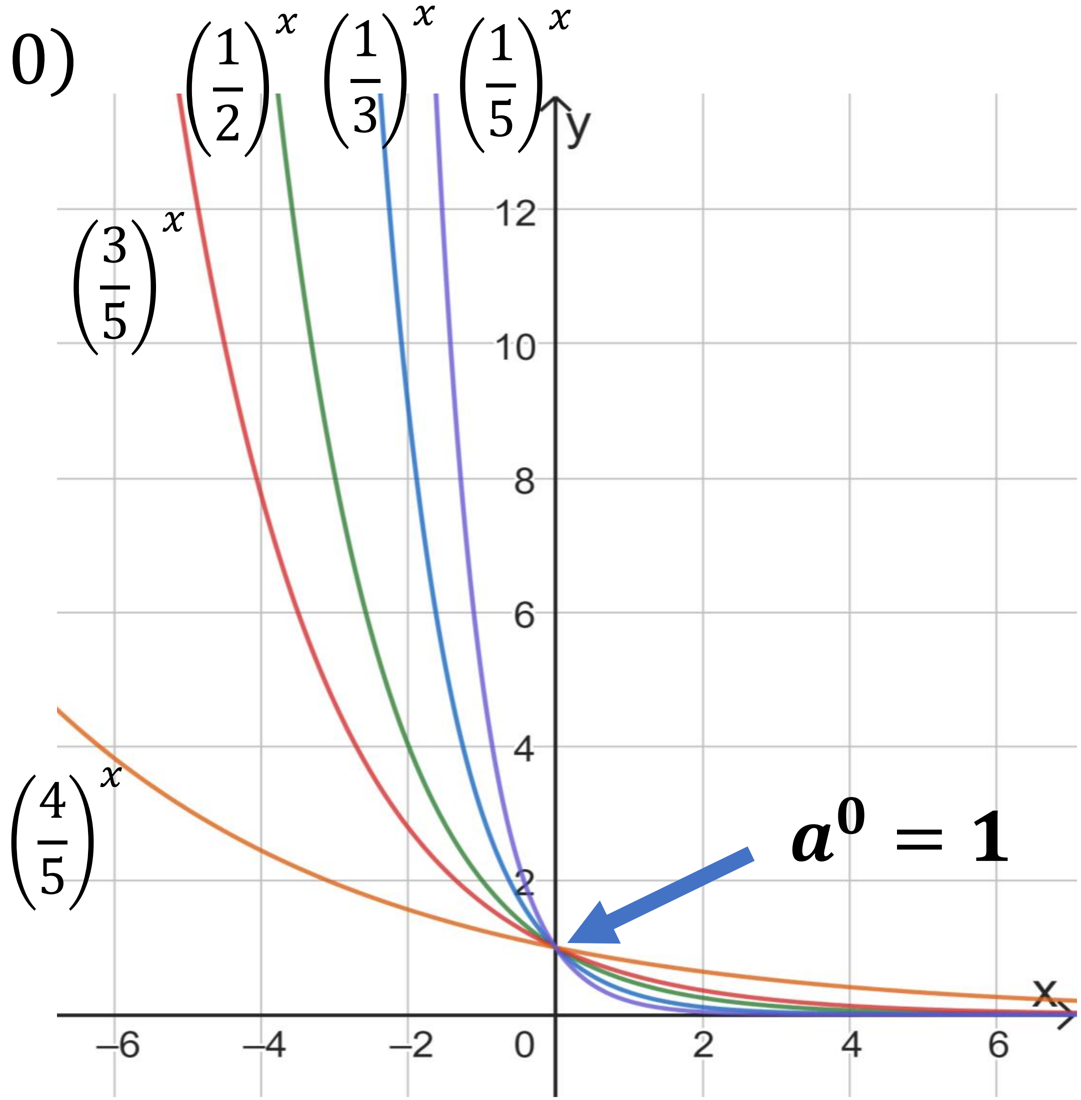
Funciones exponenciales

$$f(x) = a^x \quad (a \in \mathcal{R}; a > 0)$$

$$Dom\ f = \mathcal{R}$$

$$Im\ f = (0, \infty)$$

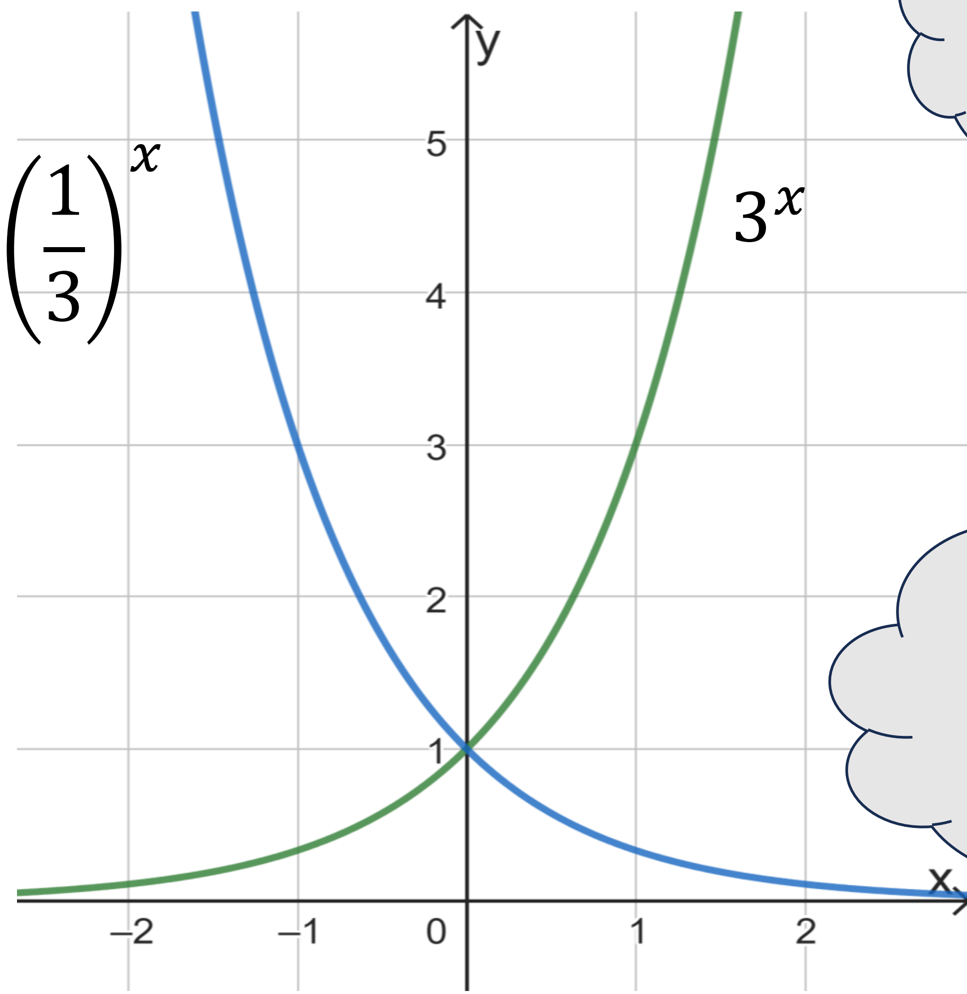
$$a < 1$$



Funciones exponenciales

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Miramos fuerte ...



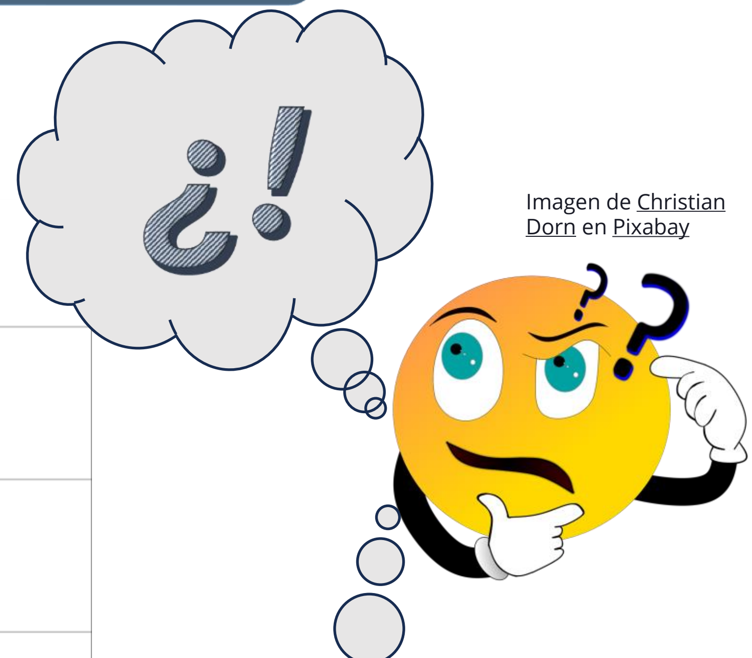


Imagen de Christian Dorn en Pixabay

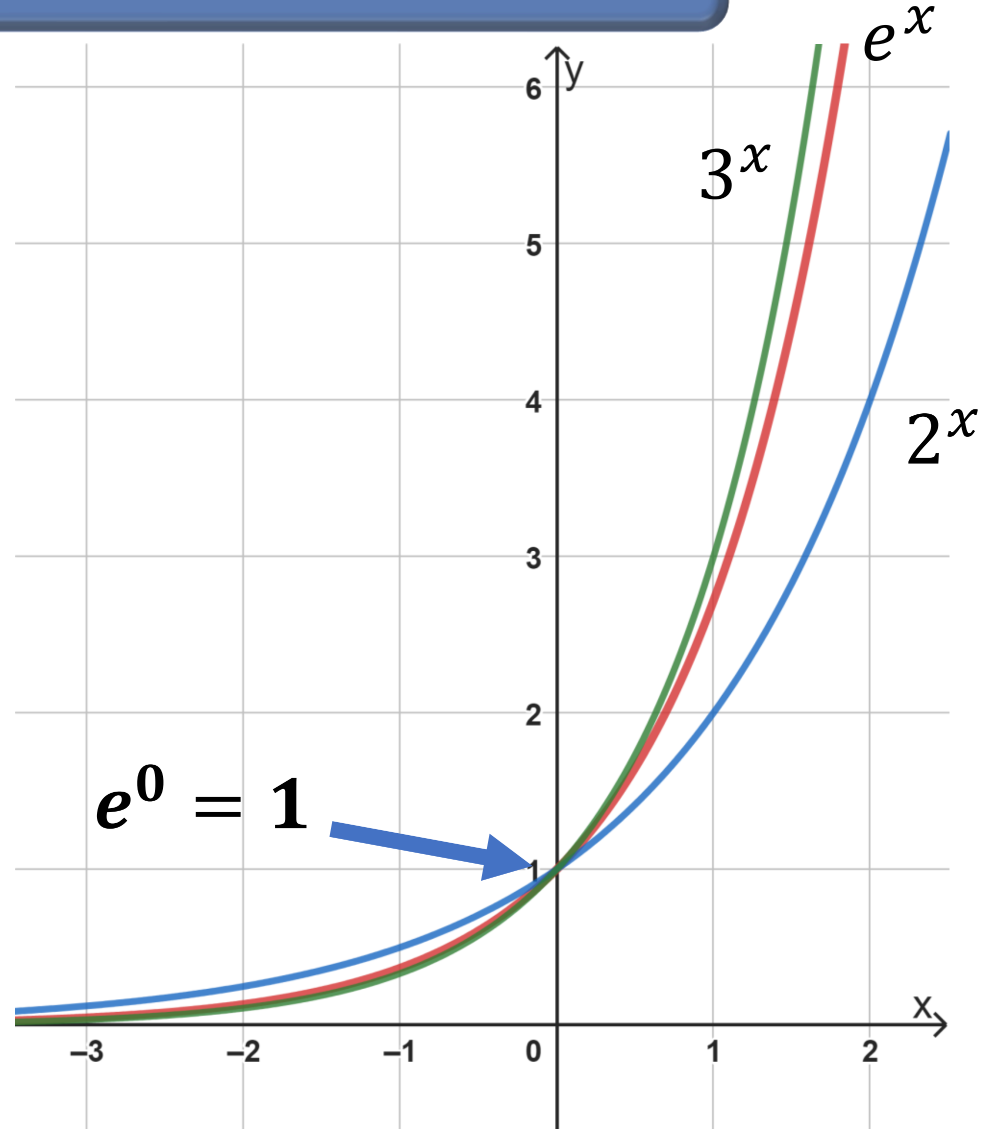
Se parecen...

Función exponencial natural

$f(x) = e^x \quad (e \approx 2{,}718281828\ldots)$

$Dom\ f = \mathcal{R}$

$Im\ f = (0, \infty)$

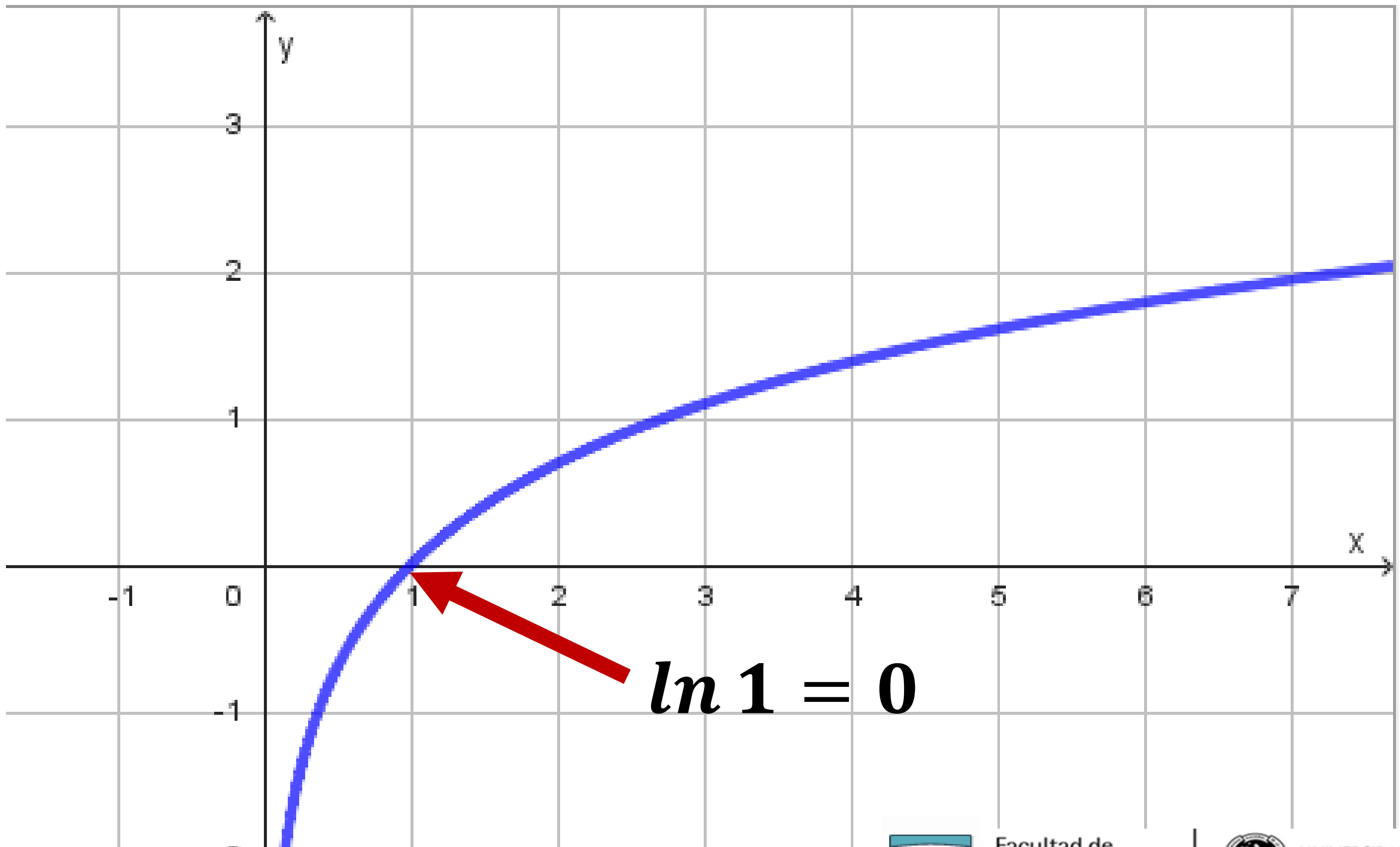


Función logaritmo natural

$g(x) = ln(x)$ (logaritmo con base e)

$Dom\ g = (0, \infty)$

$Im\ g = \mathcal{R}$



Exponencial

$f(x) = e^x$

$\boxed{Dom\ f = \mathcal{R}}$

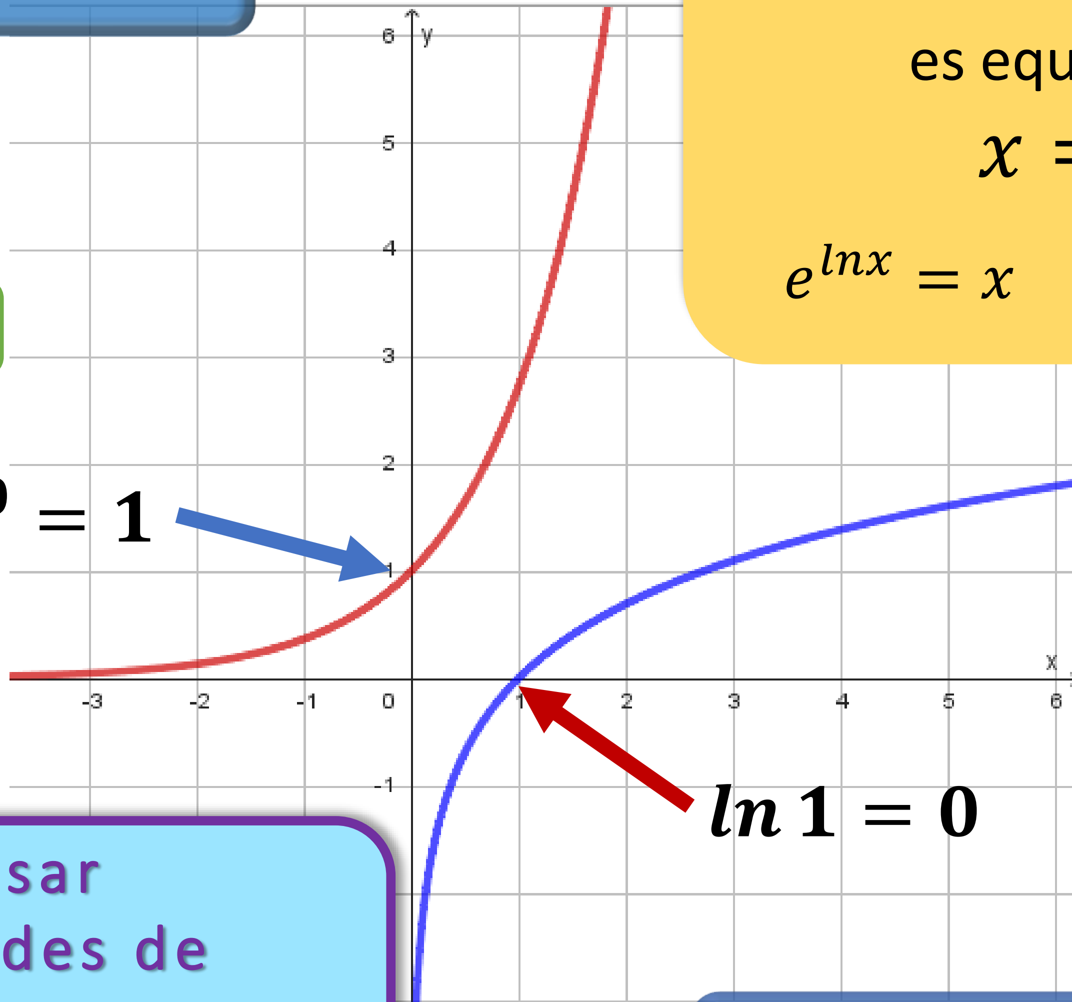
$\boxed{Im\ f = (0, \infty)}$

$$e^x = y$$

es equivalente a

$$x = lny$$

$e^{lnx} = x \qquad lne^x = x$



$\boldsymbol{e^0 = 1}$

$\boldsymbol{ln\,1 = 0}$

$g(x) = ln(x)$

$\boxed{Dom\ g = (0, \infty)}$

$\boxed{Im\ g = \mathcal{R}}$

¡Repasar propiedades de logaritmos y exponenciales!

Logaritmo natural

Ejemplos:

Determinar el dominio de:

1) $f(x) = \ln(3x + 1)$

2) $g(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}$

3) $h(x) = \dfrac{e^x}{x-4}$

4) $m(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\ln(x+1)}$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

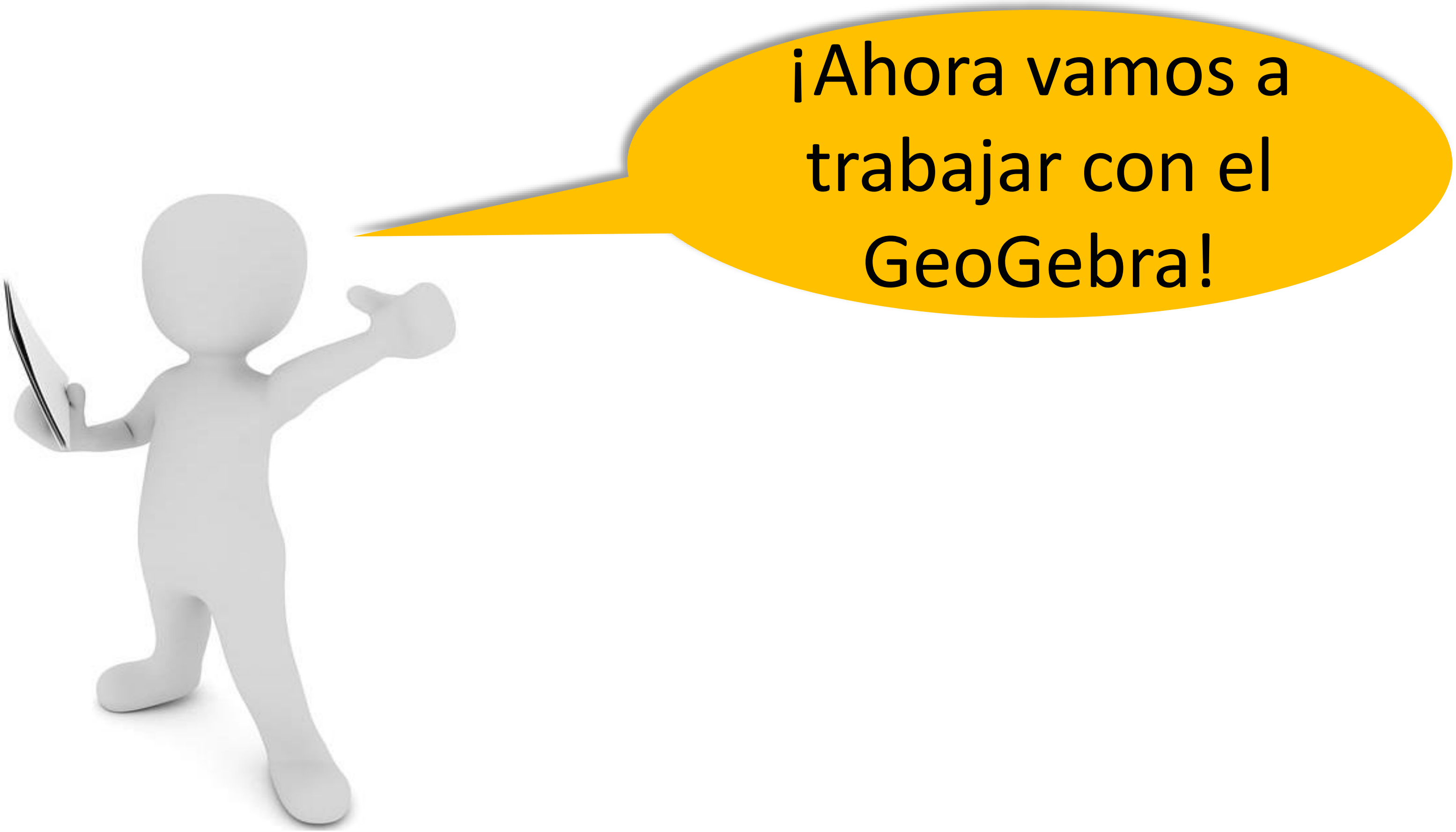


Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

GeoGebra

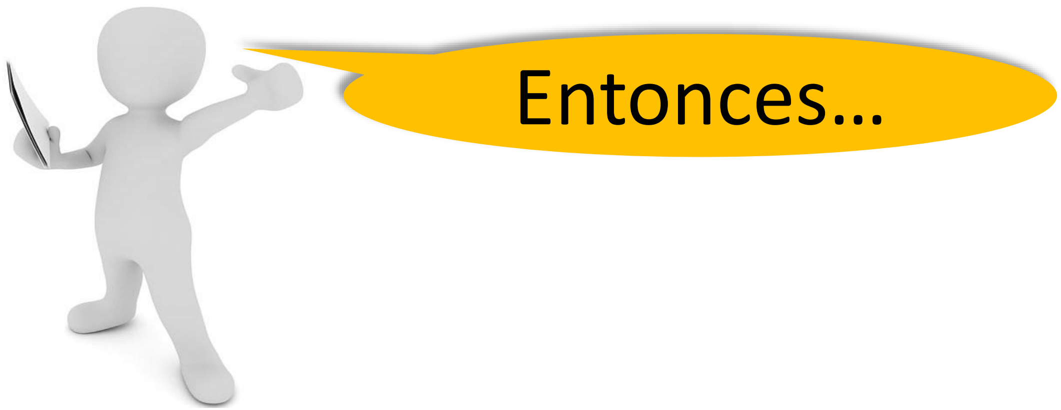


Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$f(x) \longrightarrow f(x+\boldsymbol{a})$	Traslación horizontal
$f(x) \longrightarrow f(x)+\boldsymbol{a}$	Traslación vertical
$f(x) \longrightarrow \boldsymbol{a}f(x)$	Dilatación en y
$f(x) \longrightarrow f(\boldsymbol{a}x)$	Dilatación en x

Ejemplos:

Determinar el dominio, graficar y determinar la imagen de las funciones:

a) $g(x) = \ln(x + 8)$

b) $f(x) = 2e^{x-5} + 4$

c) $h(x) = \sqrt{x-1} - 2$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

¡¡Más applets en GeoGebra!!

Dejamos algunos applets para seguir trabajando con desplazamientos y dilataciones de funciones:

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Funciones cuadráticas

Funciones con raíz cuadrada

Funciones hiperbólicas

Unir, si corresponde, la expresión de la función con su gráfica:

a) $f(x) = -\ln x$

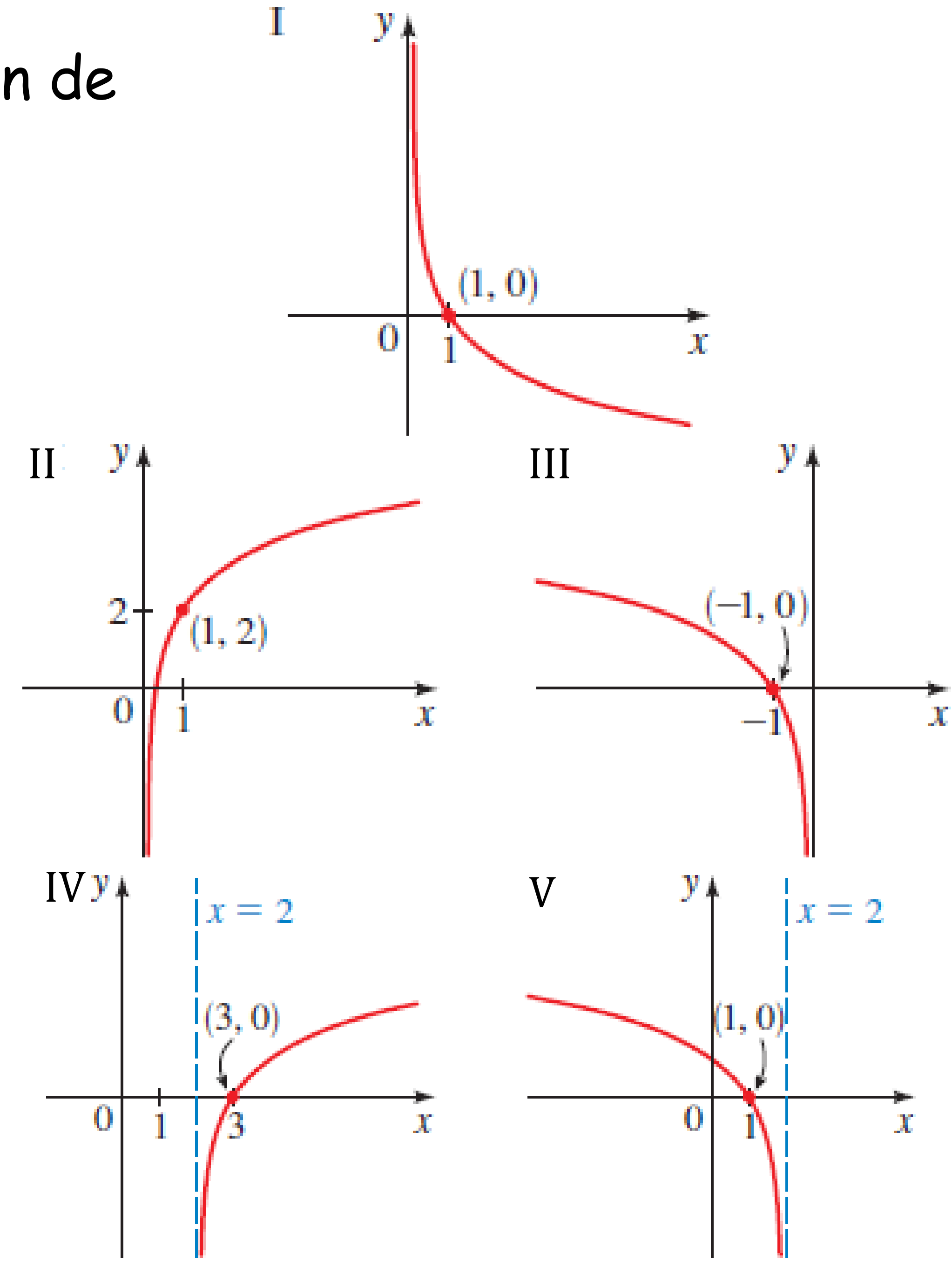
b) $f(x) = 2 + \ln x$

c) $f(x) = \ln(2 - x)$

d) $f(x) = \ln(x - 2)$

e) $f(x) = \ln(-x)$

Imagen de [Peggy und Marco Lachmann-Anke](https://pixabay.com) en [Pixabay](https://pixabay.com)



Seguimos...

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

- Polinómicas
- Racionales
- Algebraicas
- Exponenciales
- Logarítmicas
- Trigonométricas
- A trozos

Funciones a trozos

Son funciones de la forma $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in I_1 \\ f_2(x) & x \in I_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in I_n \end{cases}$

¿Dominio? ¿Gráfica? ¿Imagen?

Funciones a trozos

Ejemplo: Sea $f(x) = \begin{cases} 2sen(x) & x < 0 \\ x + 5 & 0 \leq x < 1 \\ \ln(x) & x > 1 \end{cases}$

Determinar el dominio, graficarla y determinar la imagen

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

De acuerdo a la siguiente gráfica, proponer una expresión de la función sabiendo que una parte es una recta y la otra parte una parábola. Determinar el dominio y la imagen.

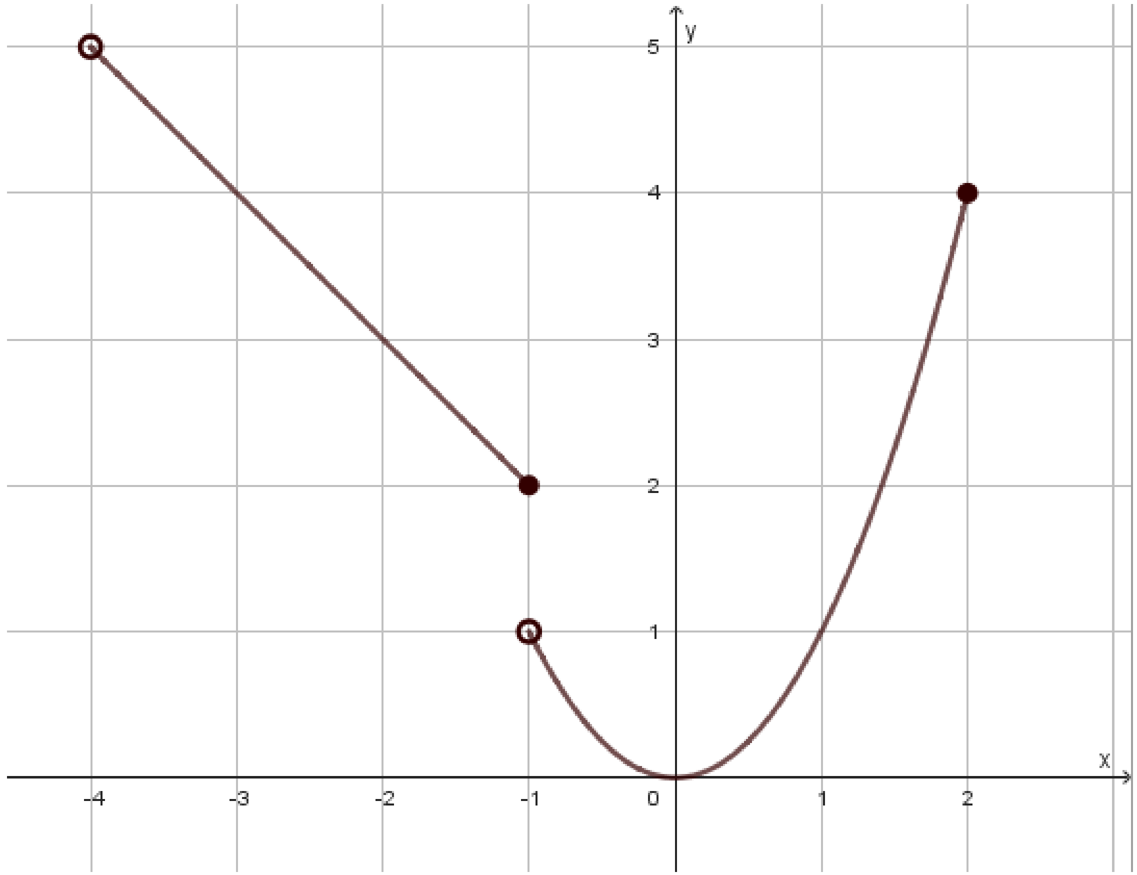
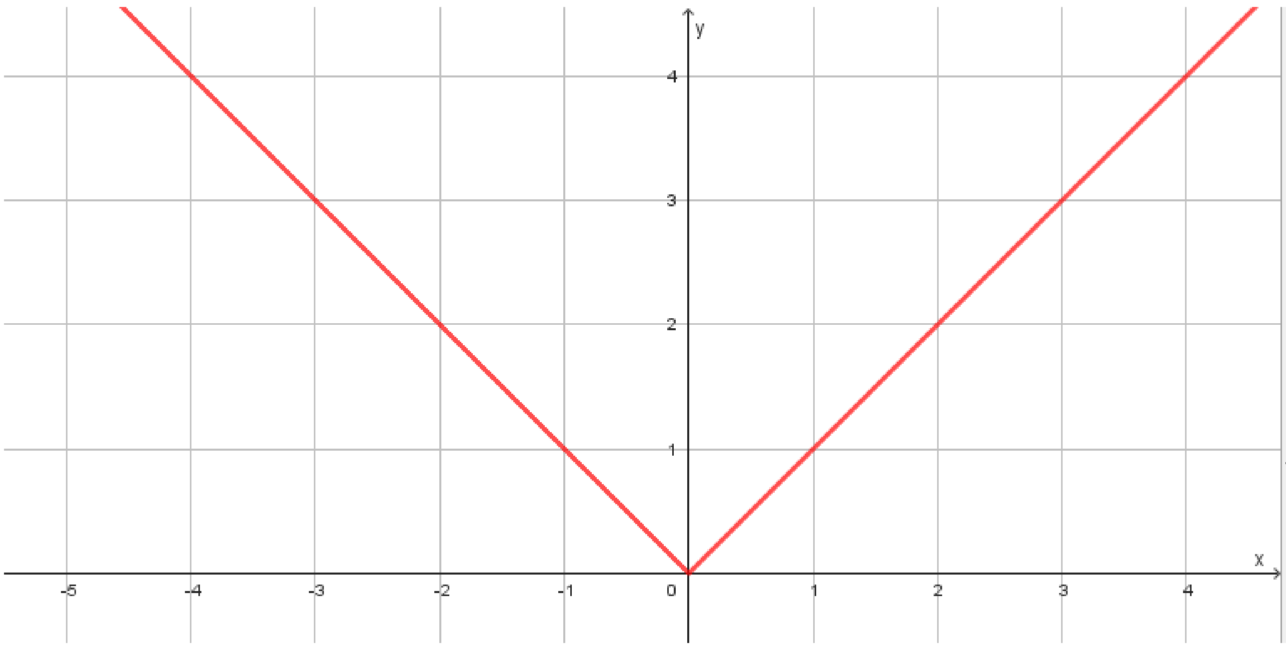


Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Función Valor absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$Dom\ f = \mathcal{R}$$



$$Im\ f = [0, \infty)$$

Matemática

Clase 21 – Martes 29/8

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

Clase	Semana	Tema de la Semana	Práctica
19	14-ago	Tema 10: Funciones. Introducción	Trabajo Práctico N°8: Funciones - Parte 1
20	21-ago	Tema 10: Funciones: exponencial y logarítmica	Trabajo Práctico N°8: Funciones - Parte 1
21	28-ago	Tema 10: Funciones: trigonométricas	Trabajo Práctico N°8: Funciones - Parte 2

Funciones

La clase pasada vimos...

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

- Función
- Dominio
- Imagen
- Gráfica
- Tipos de funciones

¡¡Seguimos con esto!!

Ya vimos algunas...

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡¡Seguimos a partir de acá!!

- Polinómicas
- Racionales
- Algebraicas
- Exponenciales
- Logarítmicas
- Trigonométricas
- A trozos

Funciones Periódicas

En la naturaleza y en tu entorno habitual hay fenómenos que se repiten a intervalos regulares, como el caso de las mareas, los péndulos y resortes, el sonido...

Las funciones que describen este tipo de fenómenos se llaman *funciones periódicas*.

Pensemos un ejemplo cotidiano de función periódica...

Funciones Periódicas

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Se cortó la luz en casa y se desprogramó el reloj de microondas… entonces me puse a pensar en la hora y en cómo se repiten cada día …

- Se podría definir una función que dé la hora en función de los segundos (o minutos) transcurridos desde un instante arbitrario…
- Pensemos… ¿cómo sería esa función?
  - Si lo configuramos en modo 12Hs …
  - Si lo hacemos en modo 24Hs …
- Con los días de la semana podríamos hacer lo mismo
- Y con las fechas del mes…

Funciones Periódicas

Definición formal

Una función $f(x)$ es periódica si y sólo si existe un número $T \in \mathcal{R}$ tal que:

$$f(x) = f(x + T) \;\; \forall x \in \mathcal{R}$$

Se llama período de $f(x)$ al mínimo valor del número T que cumple la definición anterior.

Funciones trigonométricas

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Vamos a repasar:

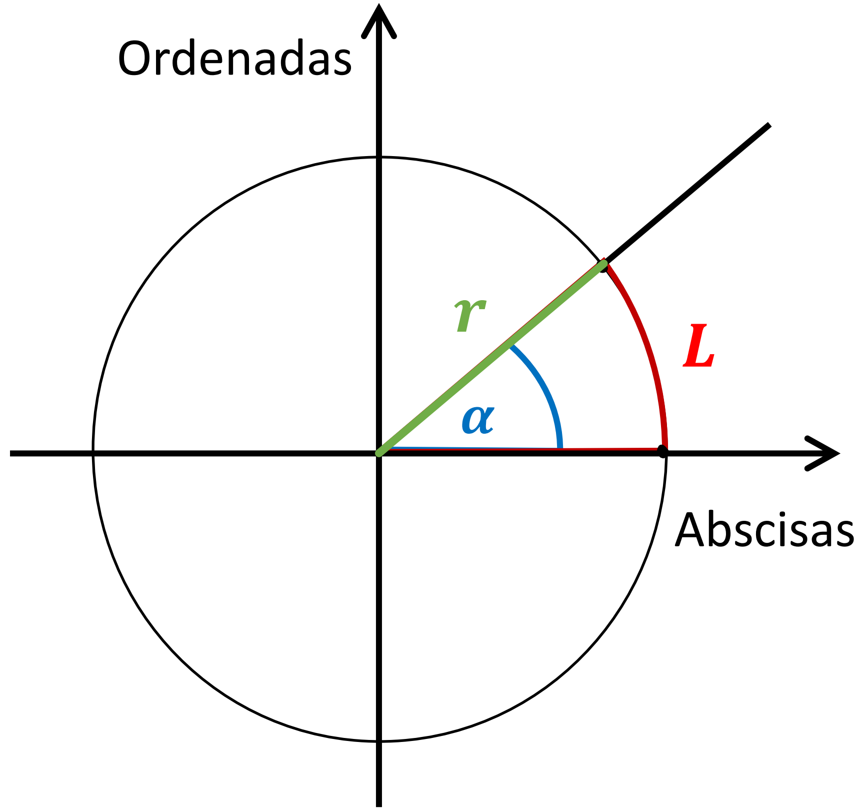
- Cómo se miden los ángulos en radianes
- Cómo se definen las funciones trigonométricas para un triángulo rectángulo

MEDIDA DE ÁNGULOS EN RADIANES

r: longitud del radio
L: longitud del arco de circunferencia

El ángulo α en radianes es:

$$\alpha[\mathrm{rad}] = \frac{L}{r}$$



Si el radio es uno, entonces la medida del ángulo α en radianes es la longitud del arco de circunferencia.

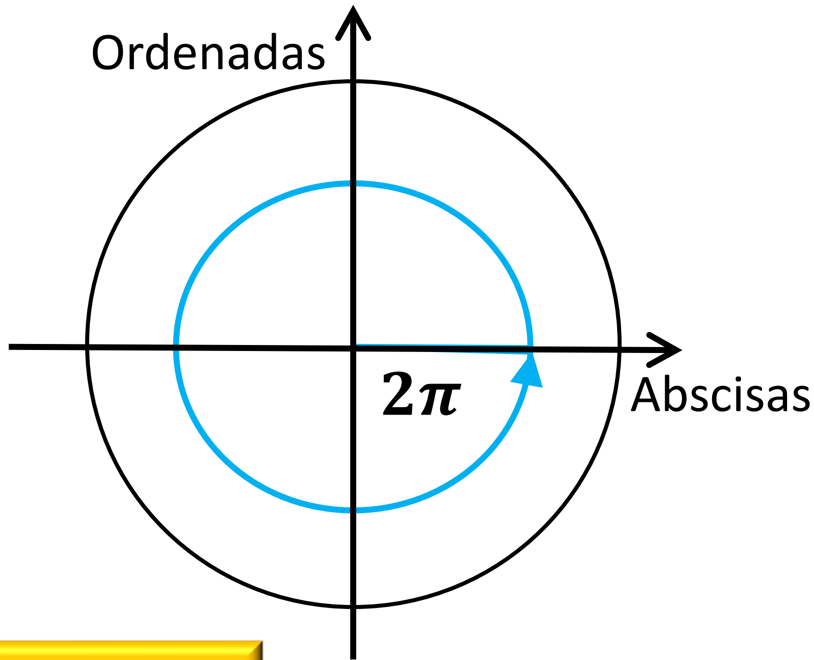
Si $r = 1 \implies \alpha[\mathrm{rad}] = L$

CONVERSIÓN GRADOS-RADIANES

La longitud de la circunferencia es: $2\pi \cdot r$

Entonces, el ángulo de giro completo medido en radianes es:

$$\boldsymbol{\alpha[rad] = \frac{L}{r} = \frac{2\pi \cdot r}{r} = 2\pi}$$



Además, sabemos que un ángulo de giro completo es 360°

PODEMOS CONVERTIR LOS GRADOS EN RADIANES Y LOS RADIANES EN GRADOS

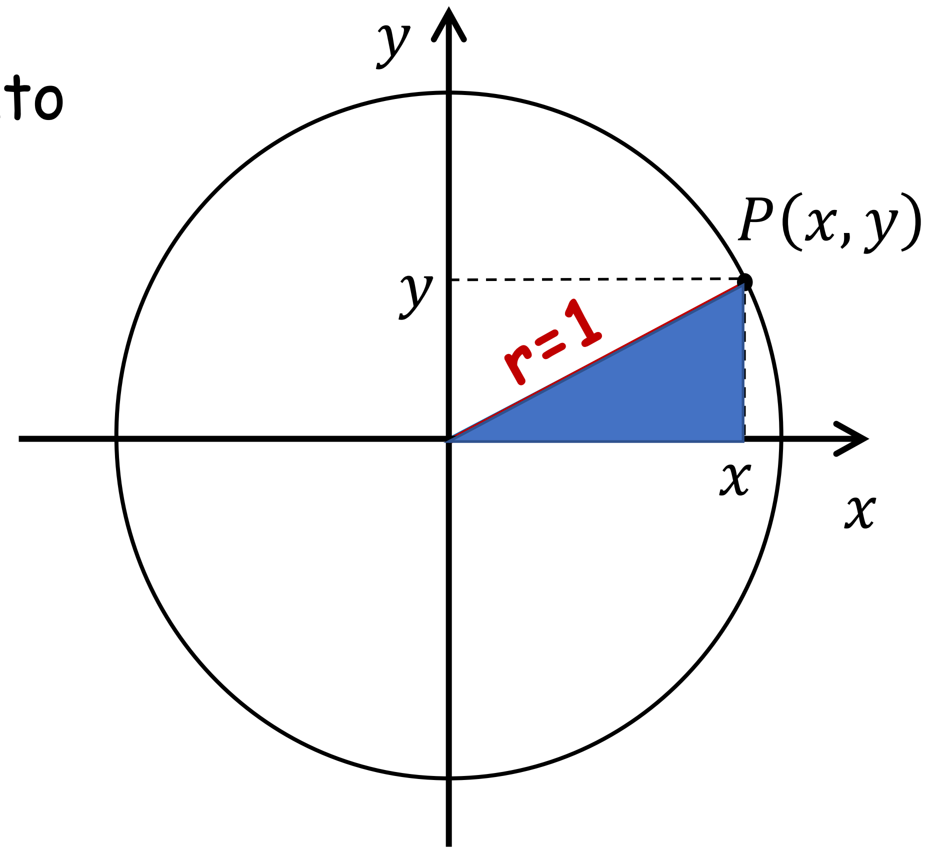
Funciones trigonométricas

Circunferencia unitaria: es una circunferencia con r=1

$\boldsymbol{P(x,y)}$ es un punto cualquiera de la circunferencia

$\boldsymbol{\alpha}$ es el ángulo que forma el segmento $\overline{\boldsymbol{OP}}$ con el eje $\boldsymbol{x}$ positivo

Repasamos las definiciones de las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo



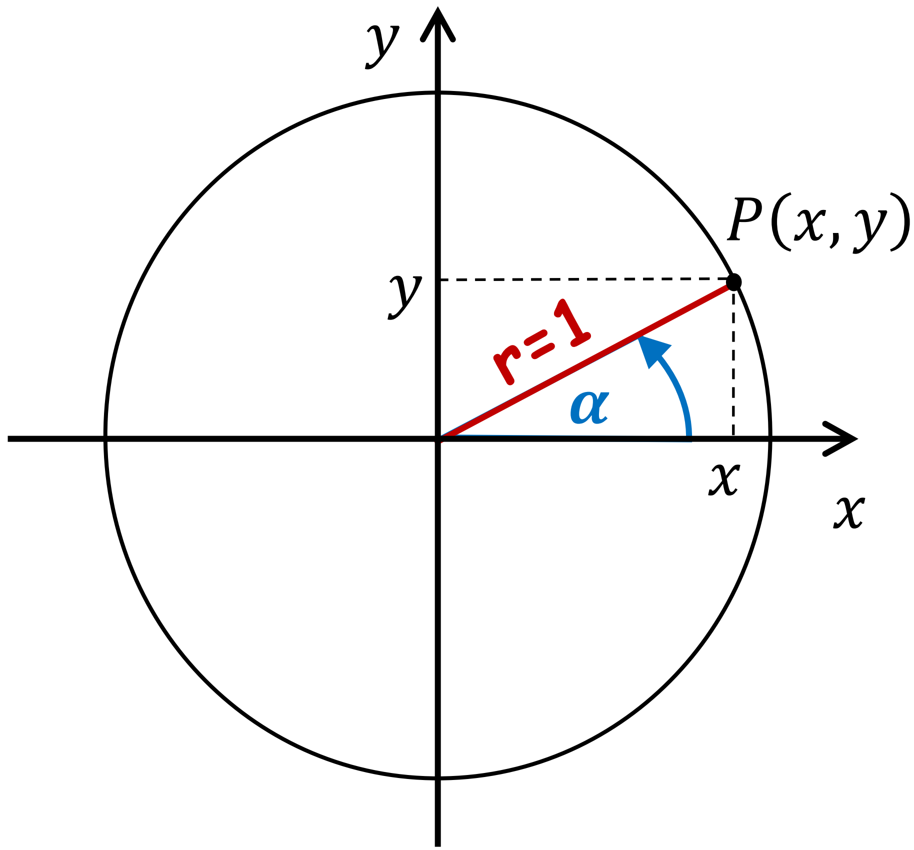
Funciones trigonométricas

<u>Circunferencia unitaria</u>: es una circunferencia con r=1

$$sen(\alpha) = \frac{cat\ opuesto}{hipotenusa} = y$$

$$cos(\alpha) = \frac{cat\ adyacente}{hipotenusa} = x$$

$$tg(\alpha) = \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{y}{x}$$



Funciones trigonométricas

¿Entonces podemos encontrar el valor de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo **conociendo las coordenadas del punto $P(x, y)$**?

Funciones trigonométricas

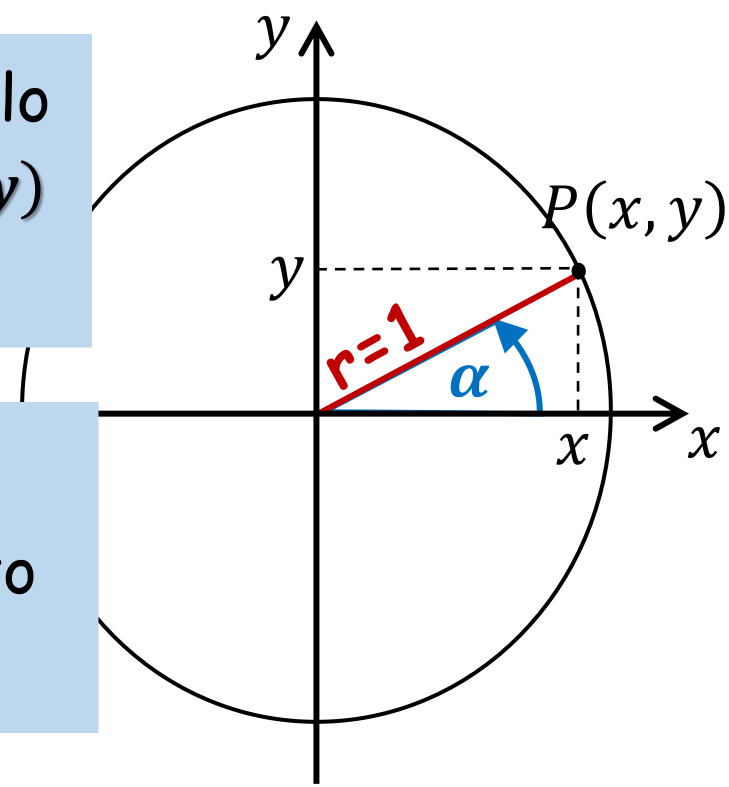
$sen(\alpha) = y$

$cos(\alpha) = x$

$tg(\alpha) = \frac{y}{x}$

Podemos conocer el valor del seno del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ mirando la coordenada $\boldsymbol{y}$ del punto $\boldsymbol{P(x,y)}$ de la circunferencia

Podemos conocer el valor del coseno del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ mirando la coordenada $\boldsymbol{x}$ del punto $\boldsymbol{P(x,y)}$ de la circunferencia



Ejemplos:

1) Determinar para qué valores de x la función $f(x) = sen(x)$ vale 0.
2) Determinar para qué valores de x la función $f(x) = sen(x)$ vale 1.
3) Determinar para qué valores de x la función $f(x) = sen(x)$ vale -1.
4) Repetir para la función $g(x) = cos(x)$

$$sen(\alpha) = y$$

$$cos(\alpha) = x$$

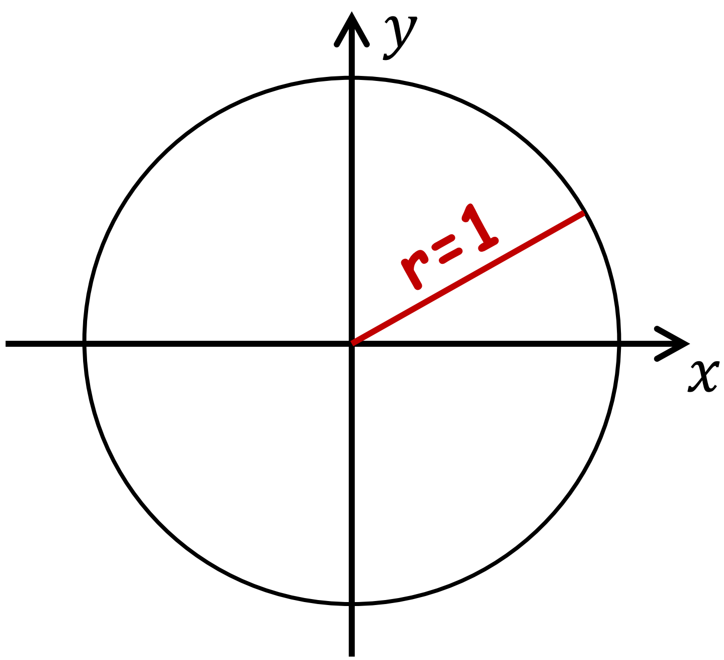


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

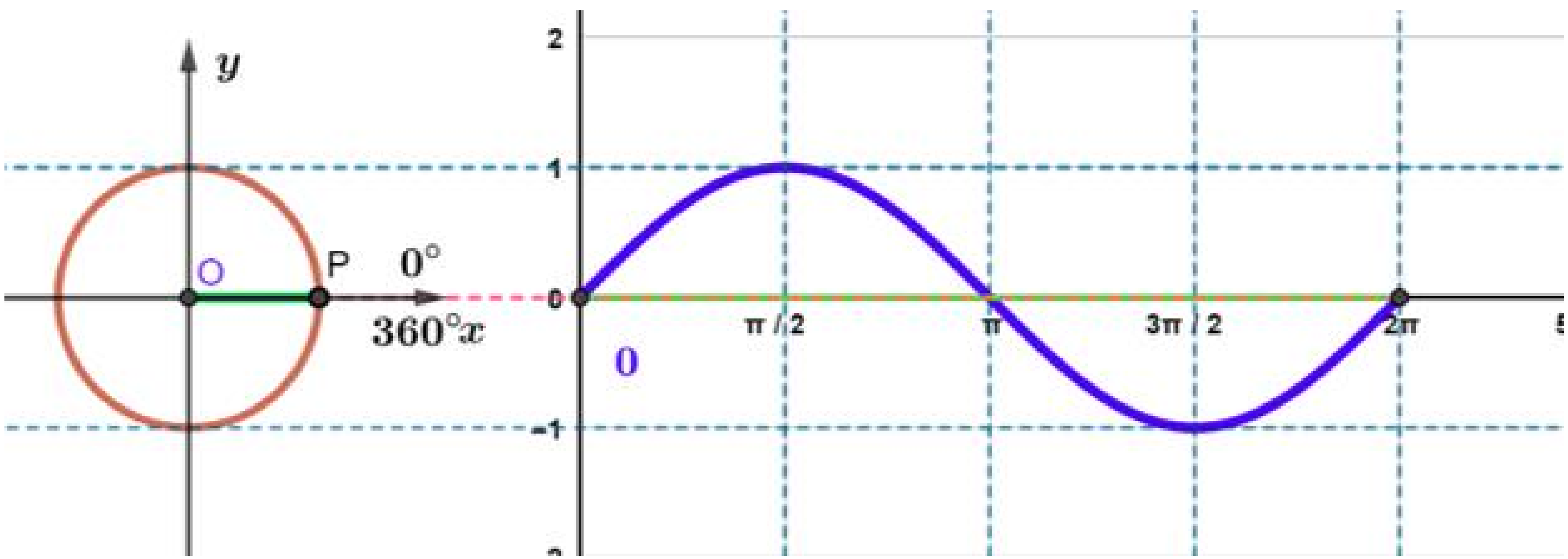
FUNCIÓN SENO

$$f(x) = sen(x)$$

$$Dom\ f = \mathcal{R}$$

$$Im\ f = [-1,1]$$

GeoGebra

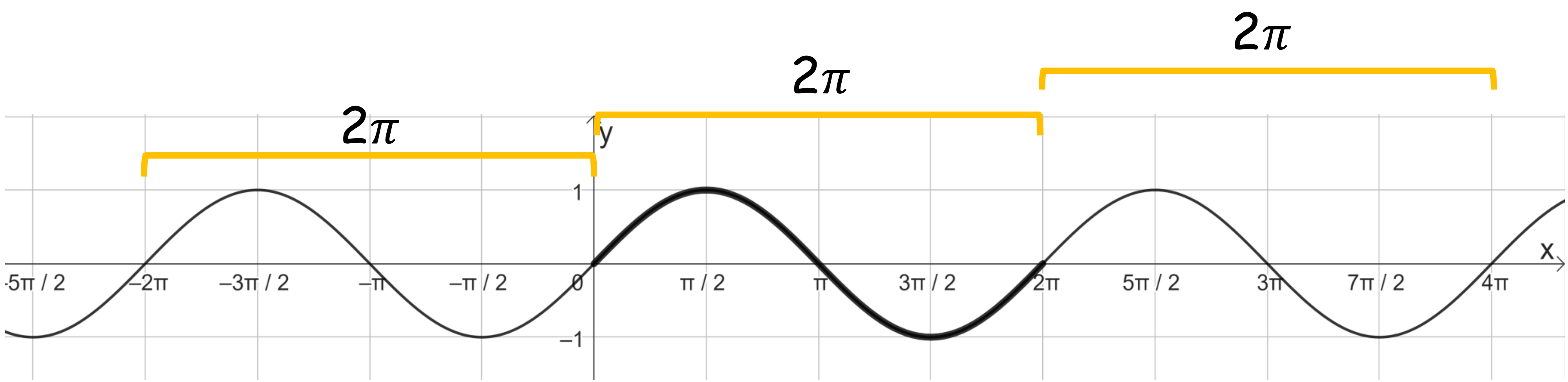


PERIODICIDAD DE LA FUNCIÓN SENO

$$\underbrace{sen(x) = sen(x + 2\pi k)}$$

Siendo k un número entero

Se repite cada 2π → **EL PERÍODO DE LA FUNCIÓN SENO ES:** $T = 2\pi$



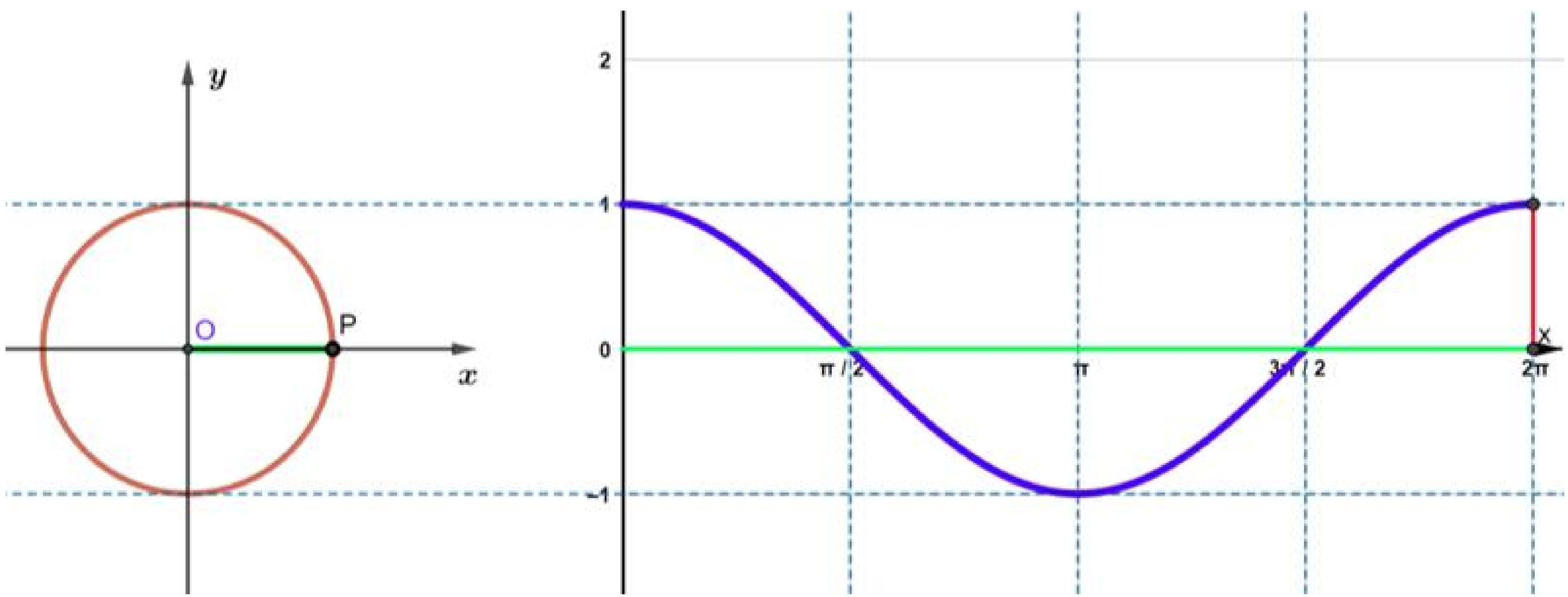
FUNCIÓN COSENO

$$\boldsymbol{f(x) = cos(x)}$$

$$Dom\ f = \mathcal{R}$$

$$Im\ f = [-1,1]$$

GeoGebra



PERIODICIDAD DE LA FUNCIÓN COSENO

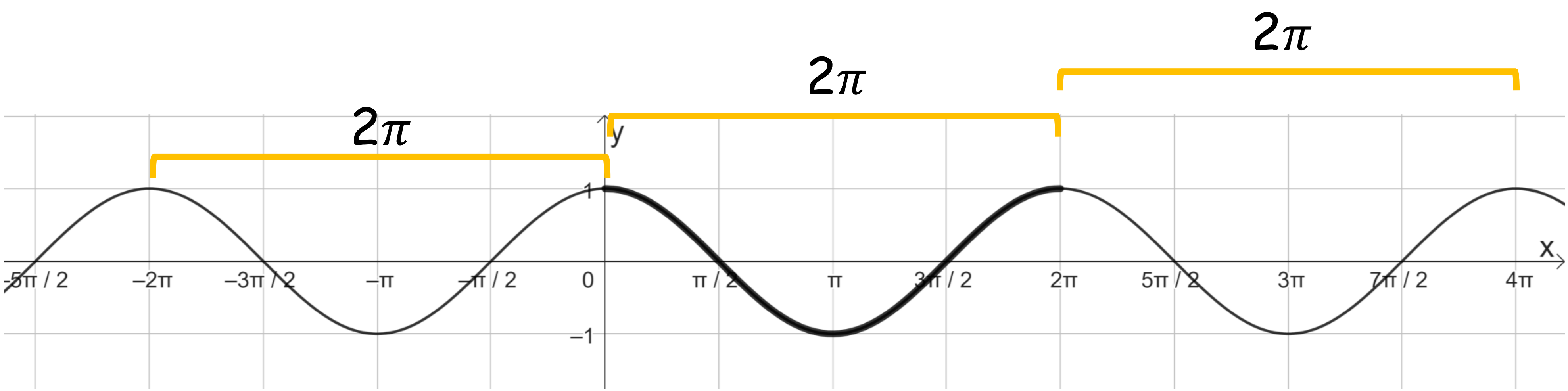
$$\underbrace{cos(x) = cos(x + 2\pi k)}$$

Siendo k un número entero

Se repite cada 2π

EL PERÍODO DE LA FUNCIÓN COSENO ES:

$$T = 2\pi$$



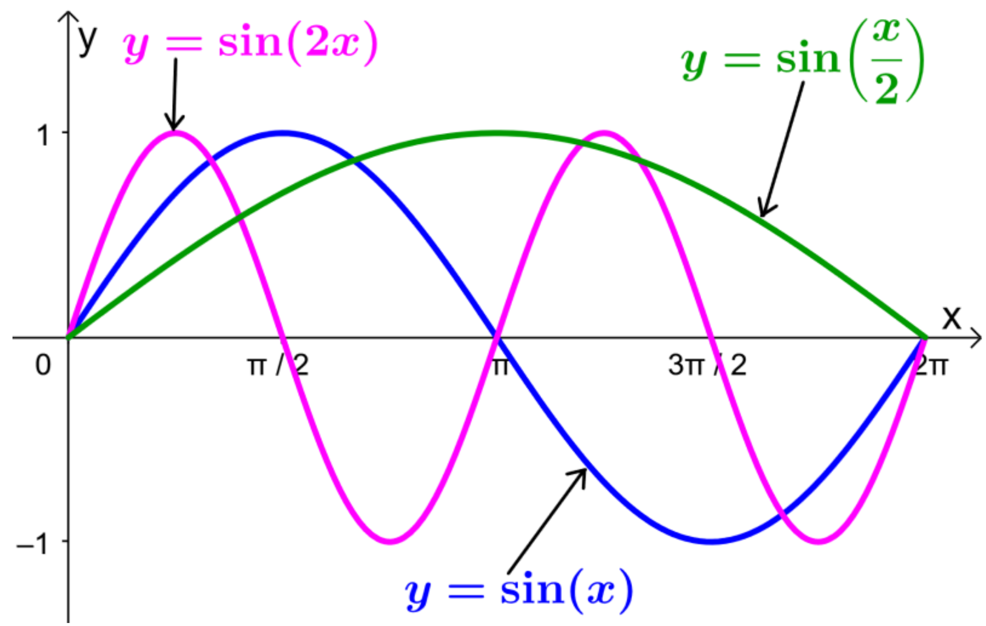
PERÍODO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Si $f(x) = sen(Bx)$ entonces el período de $f(x)$ es: $T = \dfrac{2\pi}{B}$

Si $g(x) = \cos(Bx)$ entonces el período de $g(x)$ es: $T = \dfrac{2\pi}{B}$

$$y = sen(x) \qquad y = sen(2x)$$

$$y = sen\left(\frac{x}{2}\right)$$



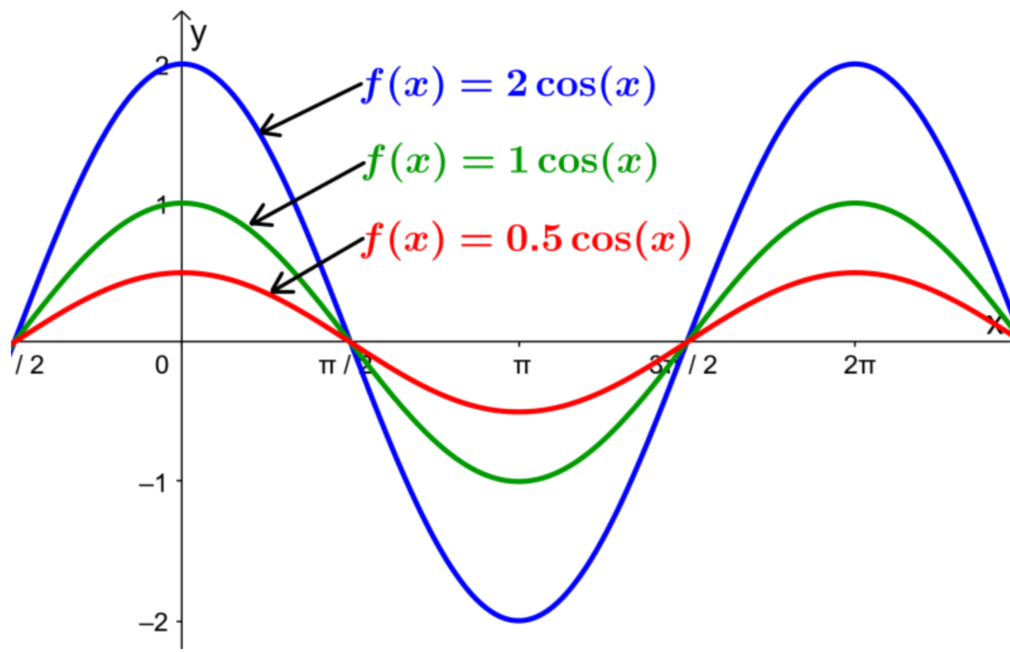
AMPLITUD DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Si $f(x) = Asen(x)$ entonces la amplitud de $f(x)$ es: $|A|$

Si $\mathrm{g}(x) = A\cos(x)$ entonces la amplitud de $\mathrm{g}(x)$ es: $|A|$

$$\mathrm{y} = 2cos(x) \qquad \mathrm{y} = cos(x)$$

$$\mathrm{y} = \frac{1}{2}\, cos(x)$$



FORMA GENERAL DE LASFUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$f(x) = A \cdot sen(Bx + C) + D$$

GeoGebra

GeoGebra

$$g(x) = A \cdot cos(Bx + C) + D$$

Veamos la forma general de las funciones trigonométricas y cómo influyen las constantes A, B, C y D

Entonces, ¿cómo influyen las constantes A,B,C y D en la gráfica de las funciones seno y coseno?

$$f(x) = Asen(Bx + C) + D \qquad f(x) = Acos(Bx + C) + D$$

$$y = 3sen(2x - \pi) - 4$$

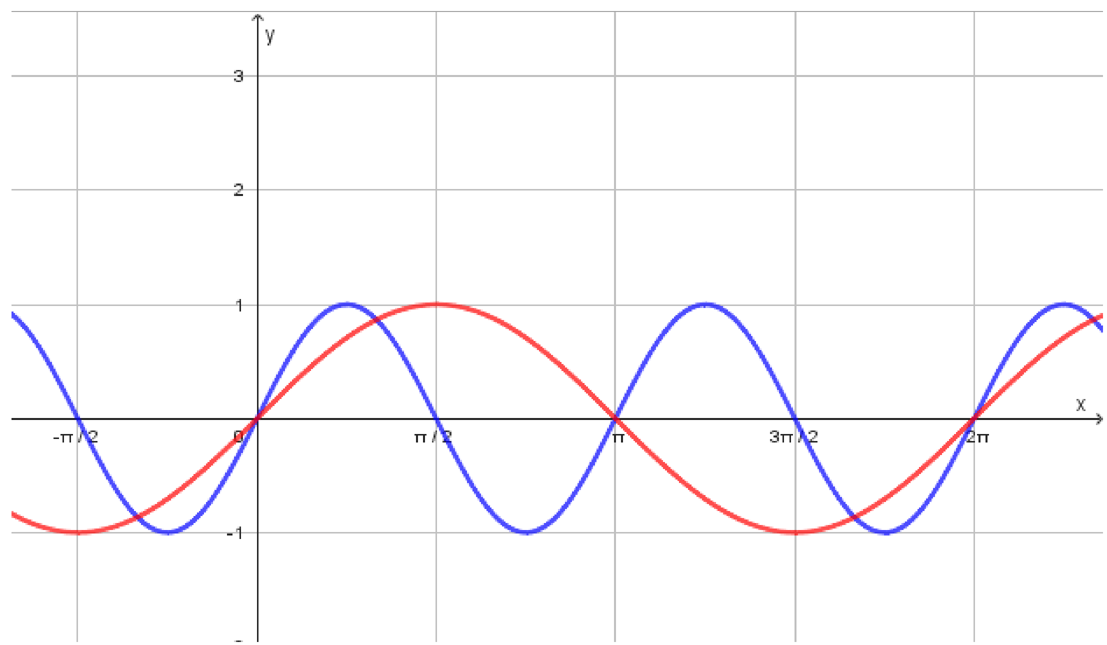
$$y = sen(x)$$

Entonces, ¿cómo influyen las constantes A,B,C y D en la gráfica de las funciones seno y coseno?

$$f(x) = Asen(Bx + C) + D \qquad f(x) = Acos(Bx + C) + D$$

$$y = 3sen(2x - \pi) - 4$$

$$y = sen(x) \rightarrow y = sen(2x)$$

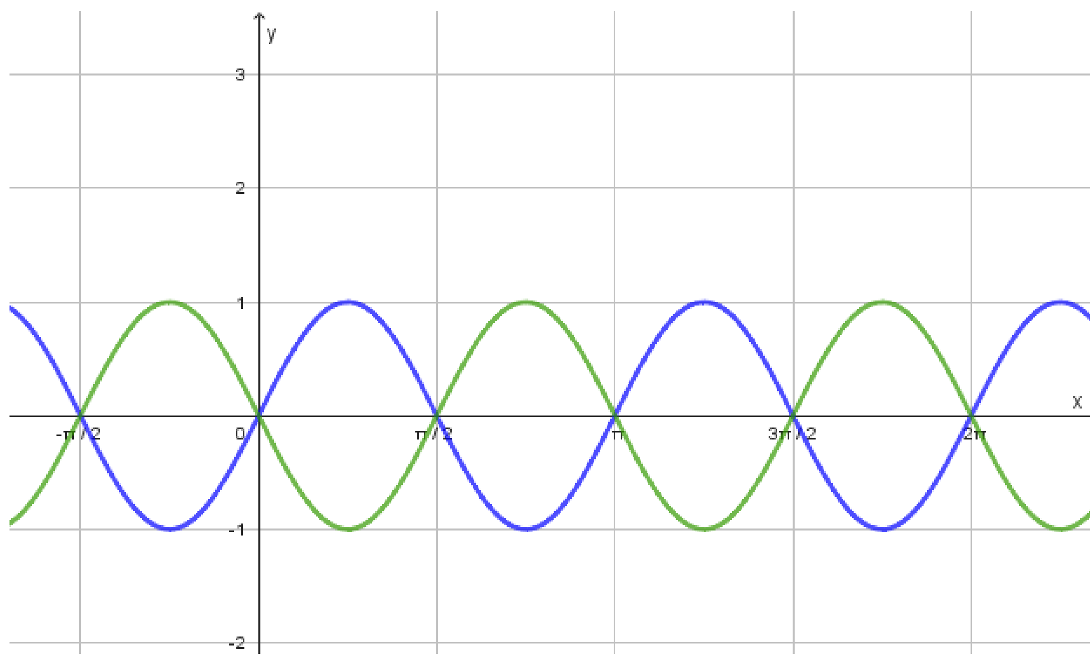


Entonces, ¿cómo influyen las constantes A,B,C y D en la gráfica de las funciones seno y coseno?

$$f(x) = Asen(Bx + C) + D \qquad f(x) = Acos(Bx + C) + D$$

$$y = 3sen(2x - \pi) - 4$$

$$y = sen(x) \rightarrow y = sen(2x) \rightarrow y = sen(2x - \pi)$$



Entonces, ¿cómo influyen las constantes A,B,C y D en la gráfica de las funciones seno y coseno?

$$f(x) = Asen(Bx + C) + D \qquad f(x) = Acos(Bx + C) + D$$

$$y = 3sen(2x - \pi) - 4$$

$$y = sen(x) \rightarrow y = sen(2x)$$

$$\downarrow$$

$$y = sen(2x - \pi)$$

$$\downarrow$$

$$y = 3sen(2x - \pi)$$

Entonces, ¿cómo influyen las constantes A,B,C y D en la gráfica de las funciones seno y coseno?

$f(x) = Asen(Bx + C$

$$y = 3sen(2x - \pi) - 4$$

$y = sen(x)$ → $y = sen(2x)$

↓

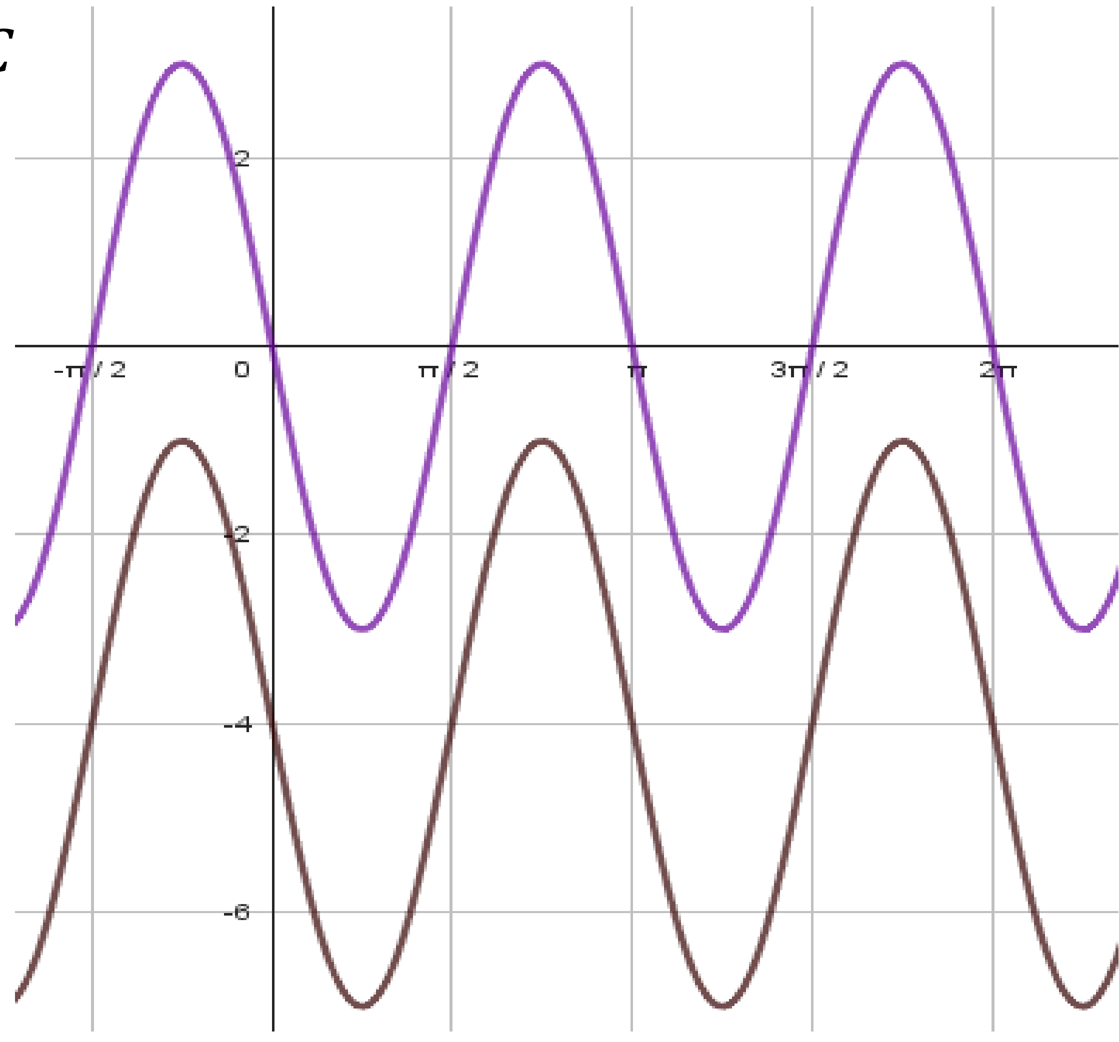
$y = sen(2x - \pi)$

↓

$y = 3sen(2x - \pi)$

↓

$y = 3sen(2x - \pi) - 4$



$$2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

TRASLACIÓN HORIZONTAL

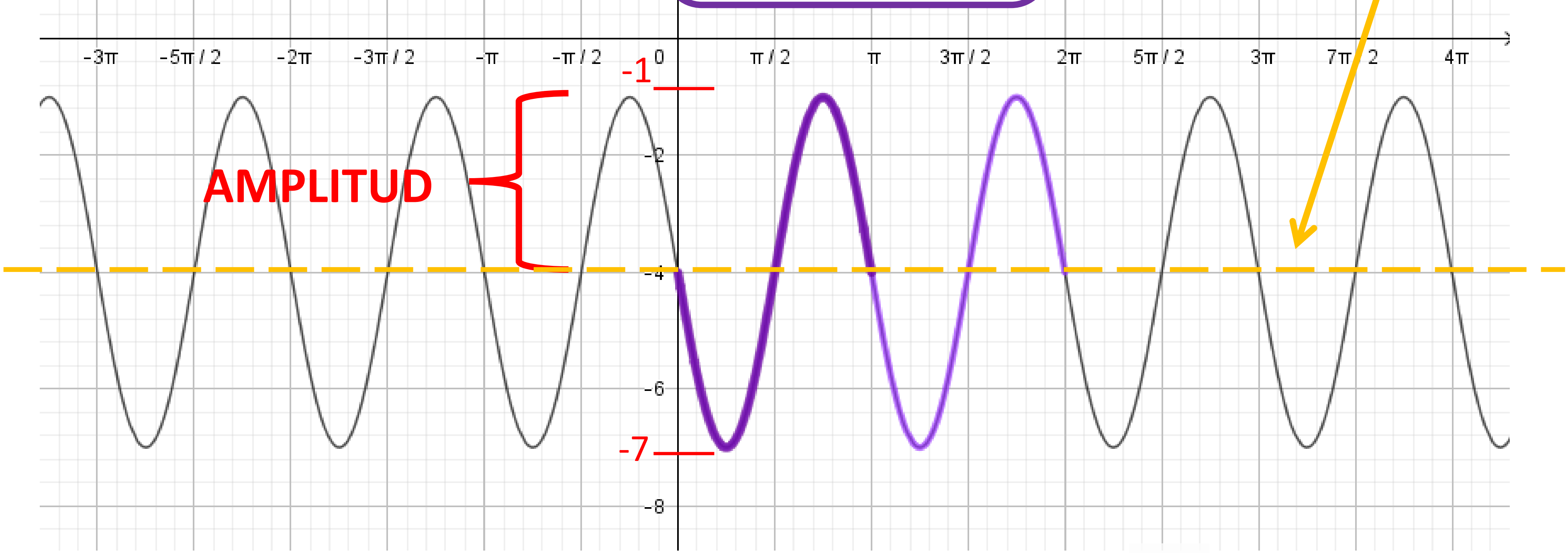
$$f(x) = 3\,sen(2x - \pi) - 4$$

$|3| = 3$ AMPLITUD

PERÍODO

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

TRASLACIÓN VERTICAL



Ejemplos:

- ✓ Dar dos expresiones distintas de una función periódica de período π y amplitud 4.
- ✓ Encontrar el período y la amplitud de la función g(x). ¿Cuál es la imagen?

$$g(x) = -3sen(7x)$$

- ✓ A partir de la gráfica de $f(x) = \cos x$, graficar h(x):

$$h(x) = -2\cos(2x - \pi) + 1$$

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo:

✓ De acuerdo a la siguiente gráfica, determine el período y la amplitud la función:

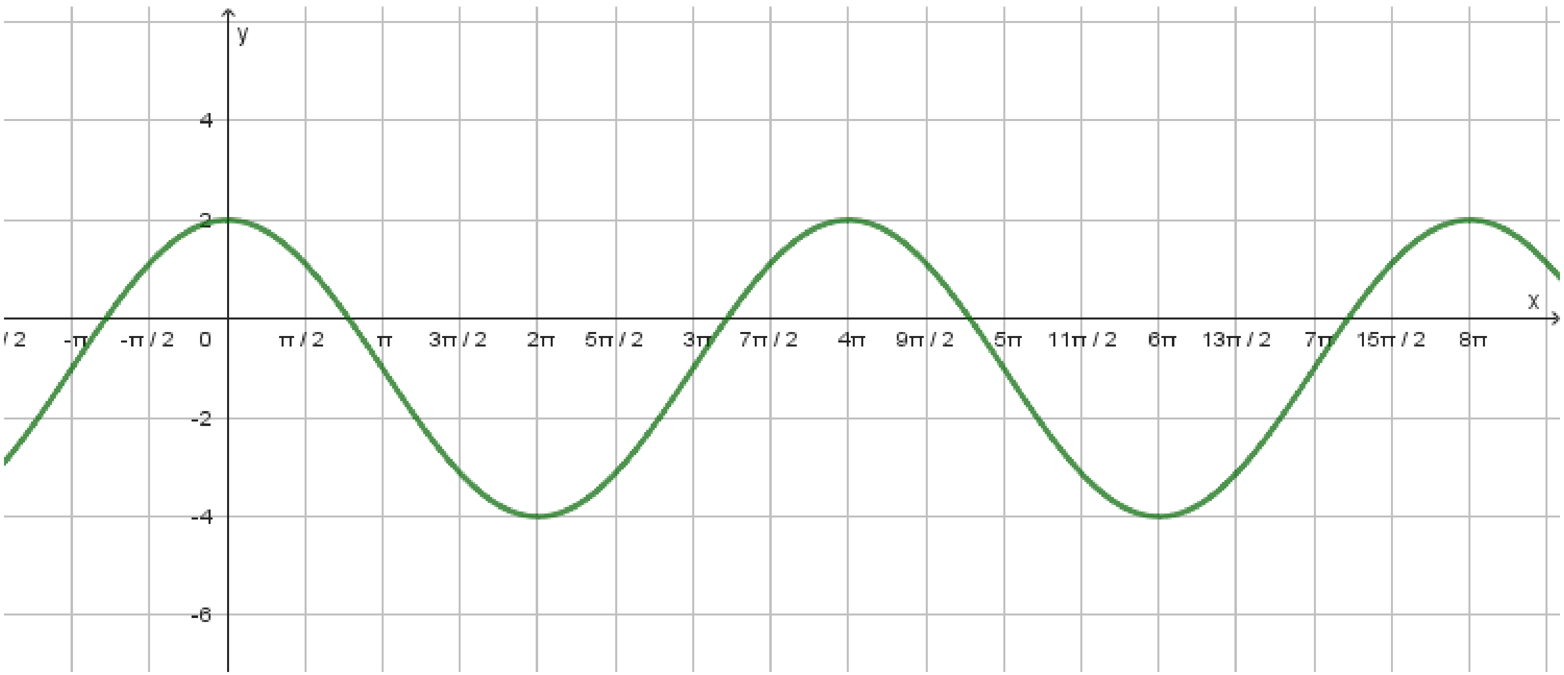


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Matemática

Clase 22 – Martes 5/9

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

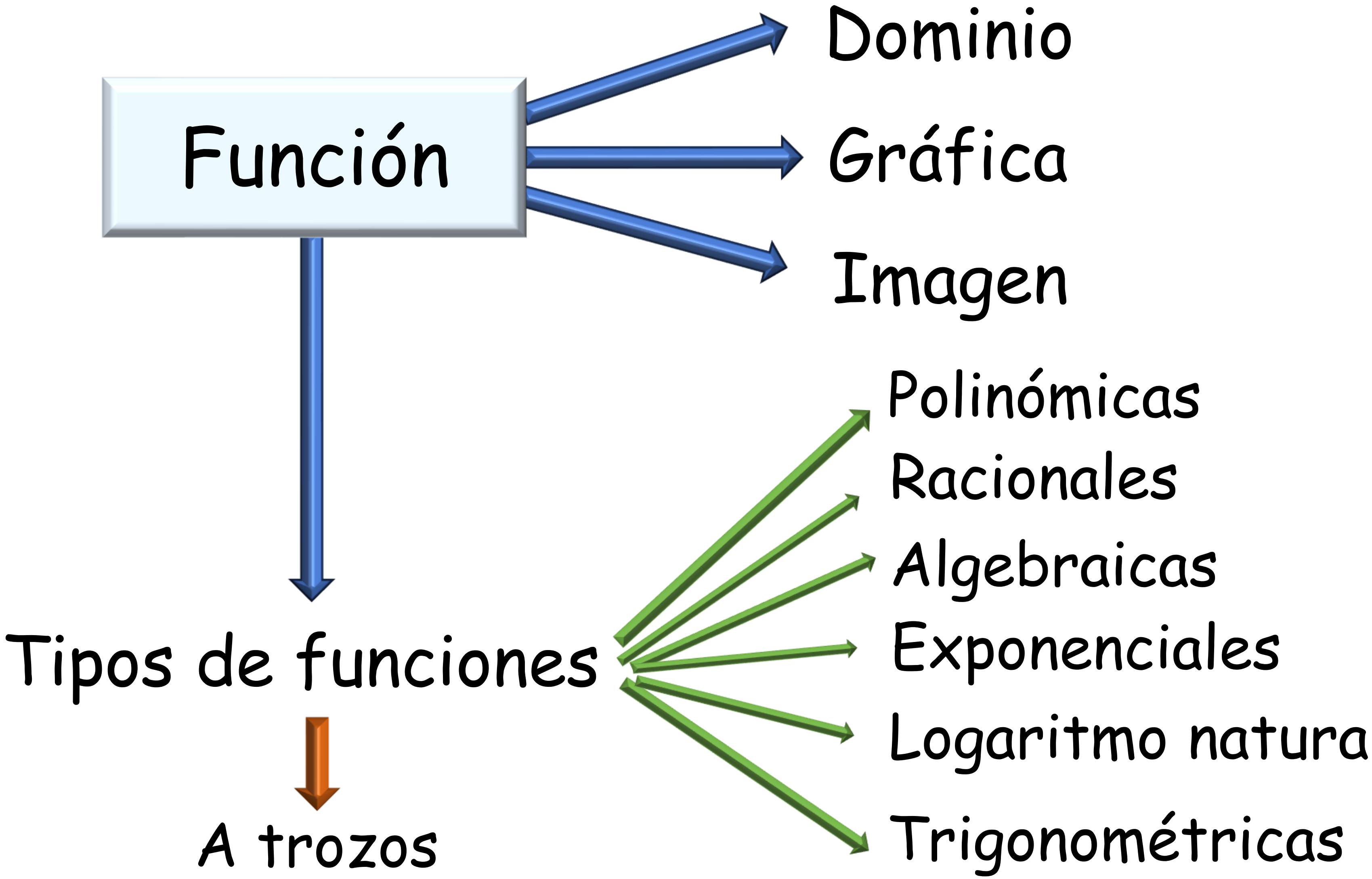
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

22	4-sep	Tema 11: Límite y continuidad	Trabajo Práctico N°9: Límite y continuidad
23	11-sep	Tema 11: Límite y continuidad	Trabajo Práctico N°9: Límite y continuidad

Límites

Las clases pasadas vimos...



Hoy vamos a estudiar…

Función → Dominio

Función → Gráfica

Función → Imagen

Función ↓

LÍMITES

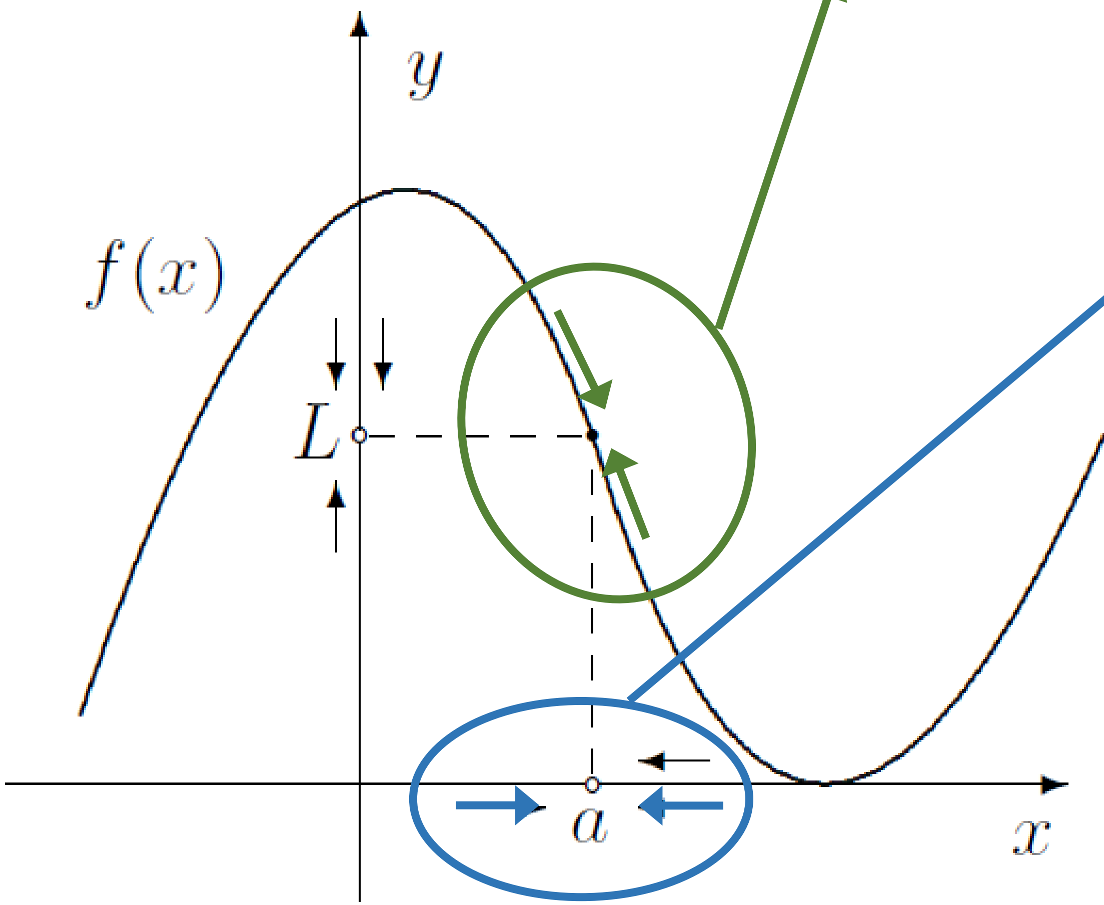
DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Se llama límite de la función $f(x)$ al valor L, si es que existe, al cual $f(x)$ se acerca, tanto como se quiera, cuando x se acerca cada vez más a un cierto valor a.

Veamos…

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

$f(x)$ tiende al valor L, cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se lee: El límite de $\boldsymbol{f(x)}$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$, es igual a $\boldsymbol{L}$.

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

El $\lim_{x \to a} f(x) = L$ es el valor al que se acerca la función y, por lo tanto, en la gráfica lo vemos en el eje y

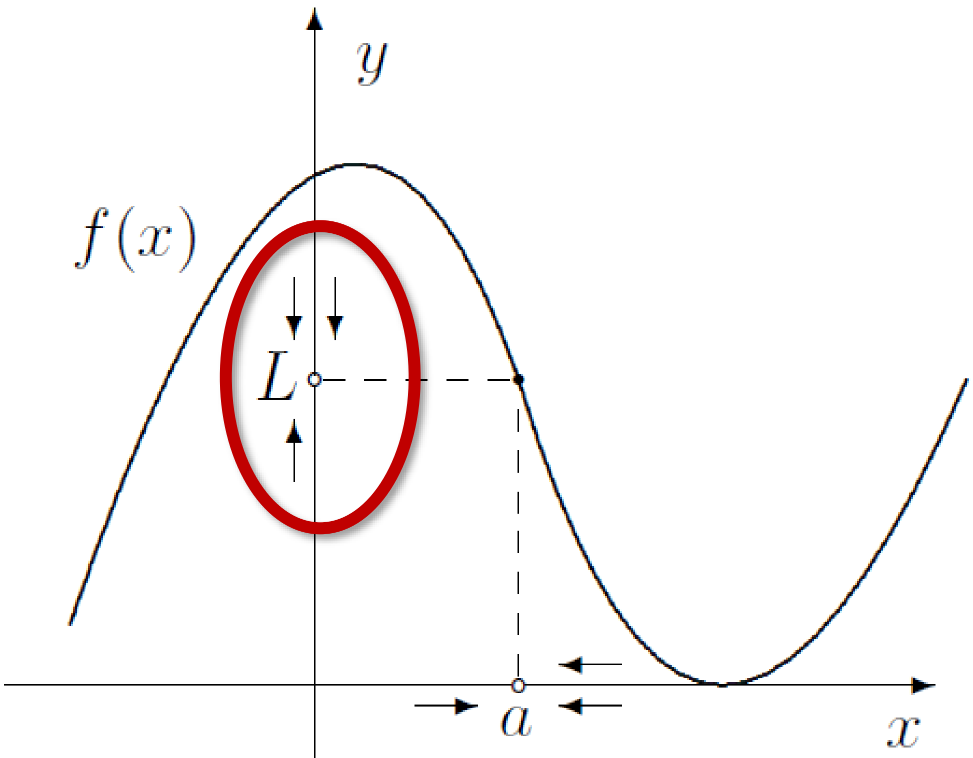


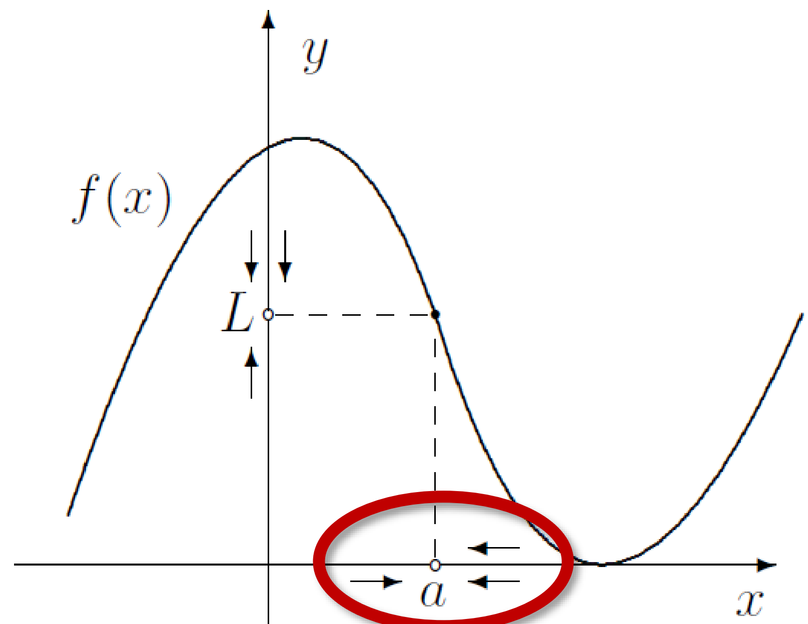
Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Al analizar $\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = L}$

$\boldsymbol{x \to a}$ significa que x se acerca mucho al valor $\boldsymbol{a}$ pero $\boldsymbol{x \neq a}$

¡¡Esto va a ser muy útil más adelante!!



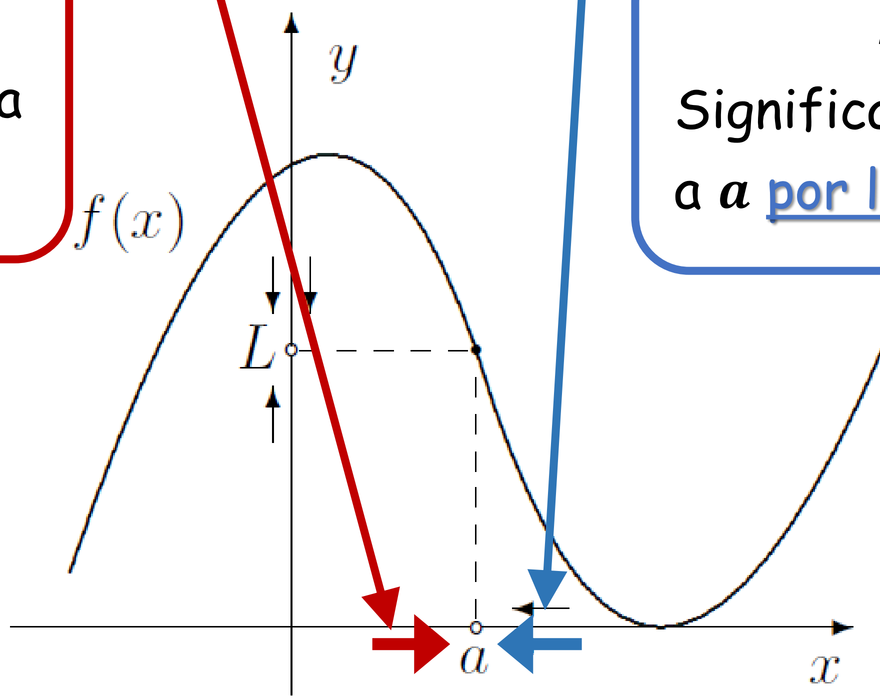
LÍMITES LATERALES

Se llama límite lateral a:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

$$x \to a^-$$

Significa que x se acerca a a por la izquierda



$$x \to a^+$$

Significa que x se acerca a a por la derecha

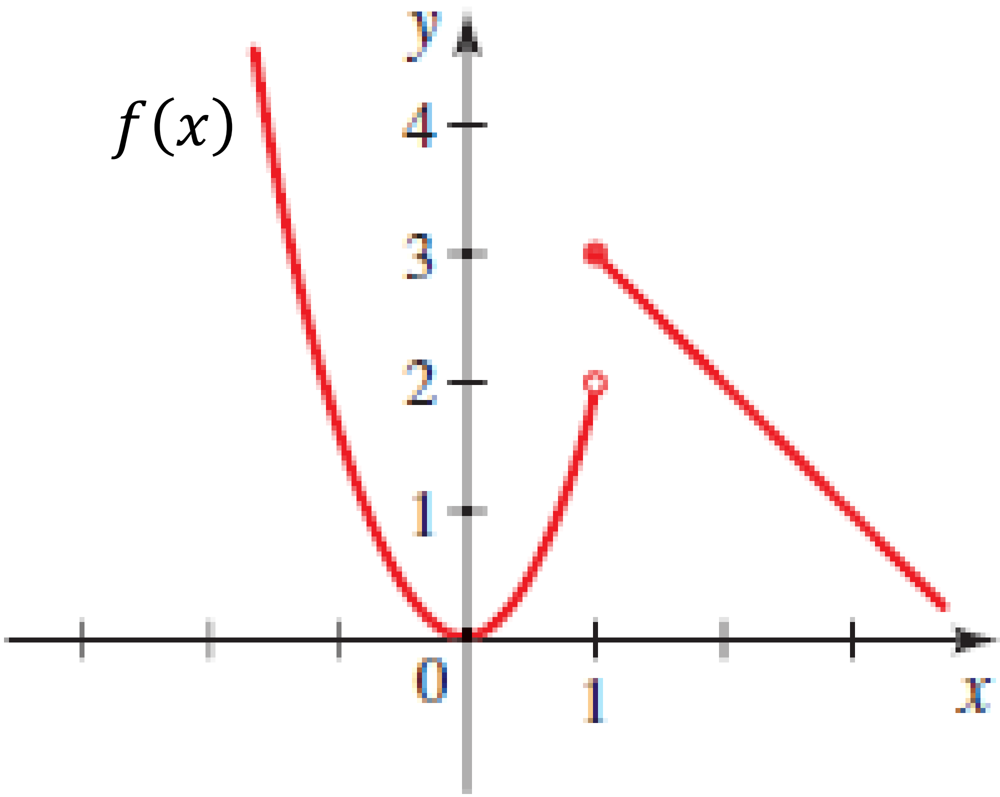
LÍMITES LATERALES

- ✓ Si ambos límites laterales existen y son iguales, entonces se dice que el **límite existe**.
- ✓ Si ambos límites laterales existen y son distintos, entonces se dice que el **límite NO existe.**
- ✓ Si al menos uno de los límites laterales NO existe, entonces el **límite NO existe**.

Simbólicamente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ si y sólo si } \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Veamos un ejemplo



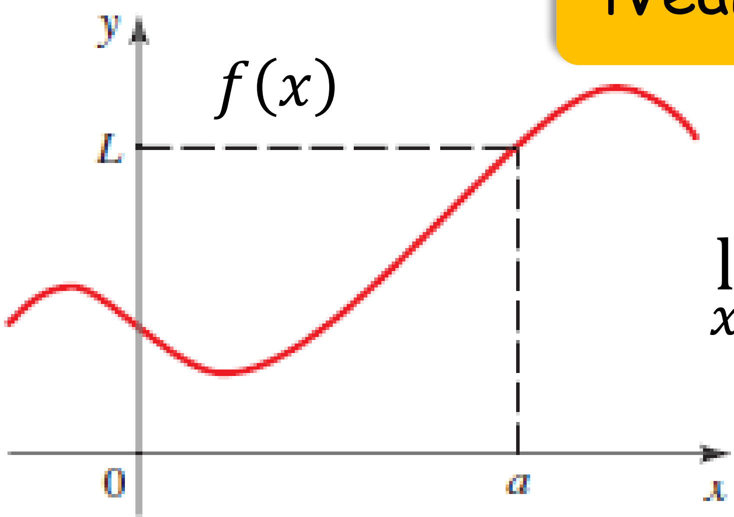
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$$

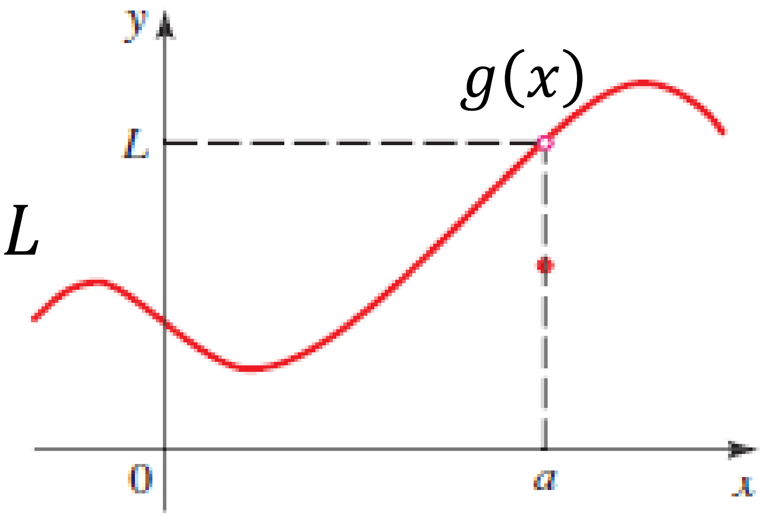
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Entonces $\lim_{x\to 1} f(x)$ *NO EXISTE*

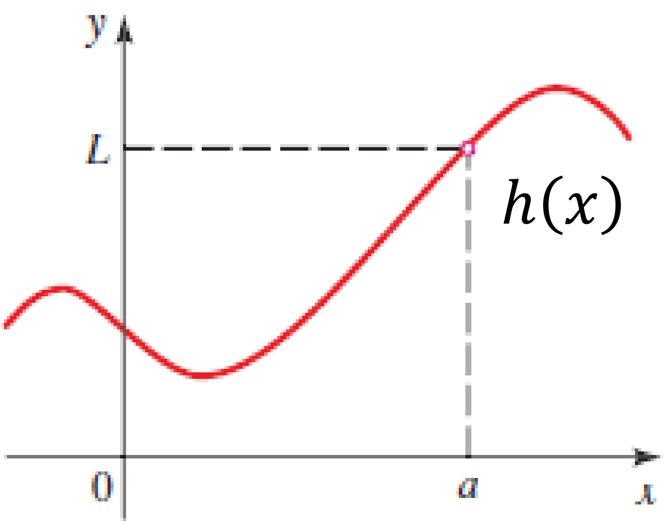
¡Veamos algunos límites gráficamente!



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



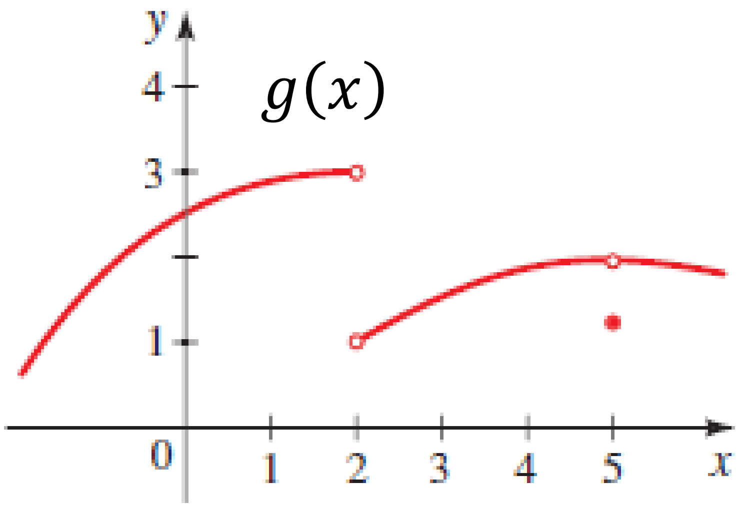
$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$



$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

En todos los ejemplos el $\lim_{x \to a}$ de la función dada, es igual a $\boldsymbol{L}$

¡Veamos algunos límites gráficamente!

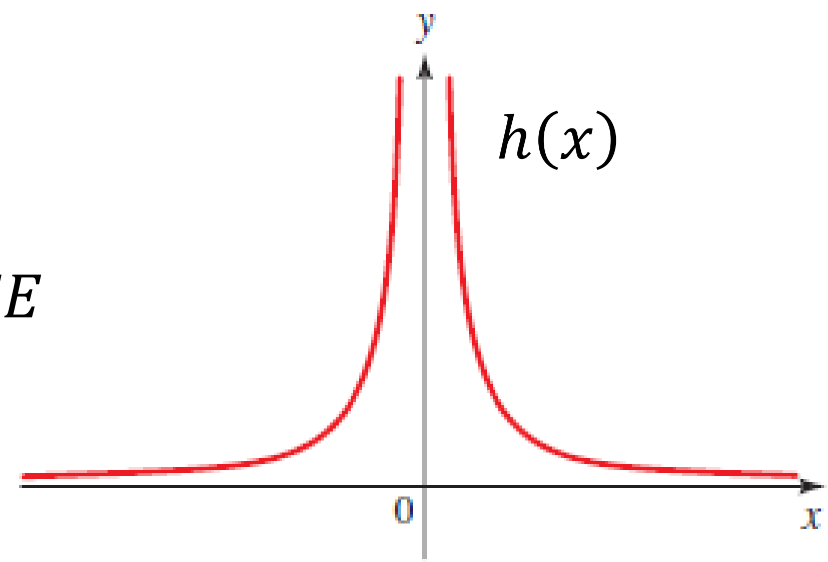


$g(x)$

$$\lim_{x \to 2} g(x) \; NO \; EXISTE$$

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 0} h(x) \; NO \; EXISTE$$



$h(x)$

¡Ahora vamos a ver cómo determinar límites analíticamente!

En la mayoría de los casos se puede encontrar el valor del límite simplemente reemplazando el valor de a en la variable independiente x

Dos límites básicos:

$$\lim_{x \to a} c = c$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Suponga que c es una constante y que los siguientes límites existen:

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

Entonces:

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \,.\, \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \qquad si\ el\ \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Suponga que c es una constante y que los siguientes límites existen:

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

Entonces:

$$6. \lim_{x \to a} [f(x)^n] = [\lim_{x \to a} f(x)]^n \qquad \textit{donde } n \textit{ es un entero positivo}$$

$$7. \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \qquad \textit{donde } n \textit{ es un entero positivo}$$

CÁLCULO ANALÍTICO DE LÍMITES

Si f es una función polinomial o racional y a está en el dominio de f, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Es decir que en estos casos se puede calcular el límite evaluando la función en el valor a

Ejemplos…

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 1} x^3 - 5x^2 + 3 =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 4} e^x (x + 4) =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \to 1} lnx + x^2 + x =$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplos…

Si $f(x) = \begin{cases} \ln(x+2) & x \leq -1 \\ x^2+1 & x > -1 \end{cases}$, ¿existe el $\lim_{x \to -1} f(x)$?. Graficar.

Determinar si existe el $\lim_{x \to 0} g(x)$, el $\lim_{x \to 1} g(x)$ y el $\lim_{x \to 2} g(x)$ y graficar $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ x^2+1 & 0 \leq x < 2 \\ x+3 & x > 2 \end{cases}$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

LÍMITES INFINITOS

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{x-1} =$$ 

Regla:

Si se tiene un cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ donde:

- el denominador tiende a cero cuando x tiende a a
- el numerador NO tiende a cero cuando x tiende a a

Entonces el límite del cociente NO EXISTE.

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{x-1} \; NO\ EXISTE$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+3}{x+2} \; NO\ EXISTE$$

LÍMITES INFINITOS

Sea una función $f(x)$ definida a ambos lados de a (excepto posiblemente en a).

Entonces:

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ significa que $f(x)$ se hace cada vez más grande a medida que $x \to a$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que $f(x)$ se hace cada vez más grande y negativa a medida que $x \to a$

LÍMITES INFINITOS

Entonces los siguientes límites no existen porque el denominador tiende a cero, pero el numerador no:

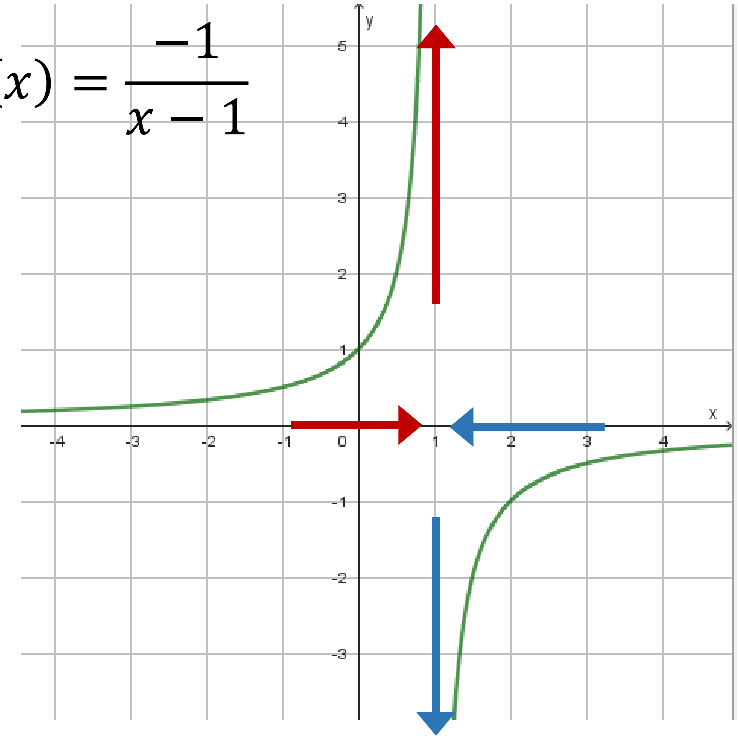
$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{x-1} \qquad \lim_{x \to -2} \frac{x+3}{x+2}$$

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

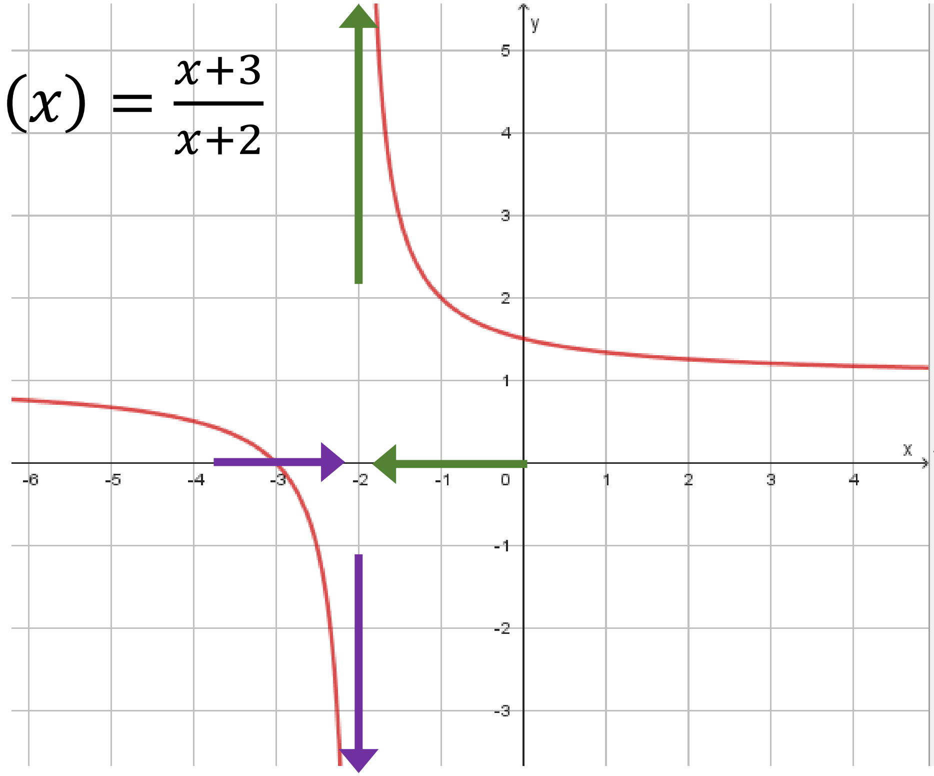
Veamos las gráficas de estas funciones...

LÍMITES INFINITOS

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}$$



$$g(x)=\frac{x+3}{x+2}$$



$$\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x-1}=\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x+3}{x+2}=\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x+3}{x+2}=-\infty$$

ASÍNTOTAS VERTICALES

DEFINIMOS…

Si se tiene que:

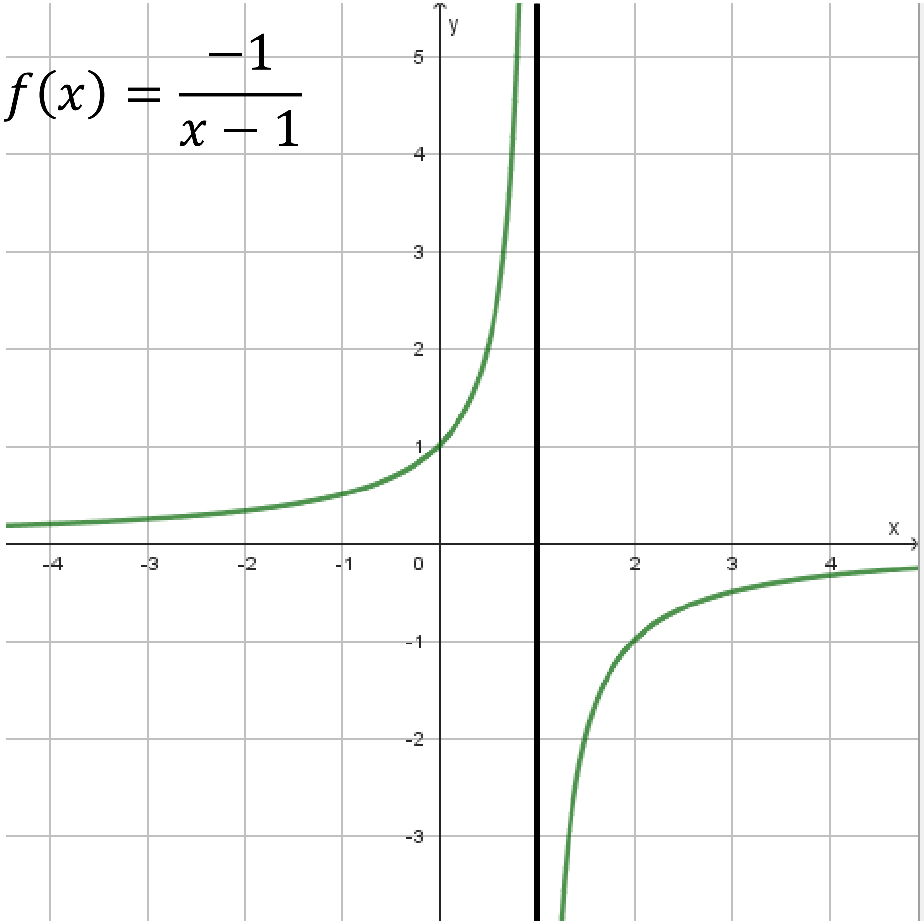
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \ o \ -\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \ o \ -\infty$$

Entonces se dice que la función f tiene una ASÍNTOTA VERTICAL y es la recta vertical $\boldsymbol{x = a}$.

Volvamos a las funciones anteriores… y miremos sus gráficas…

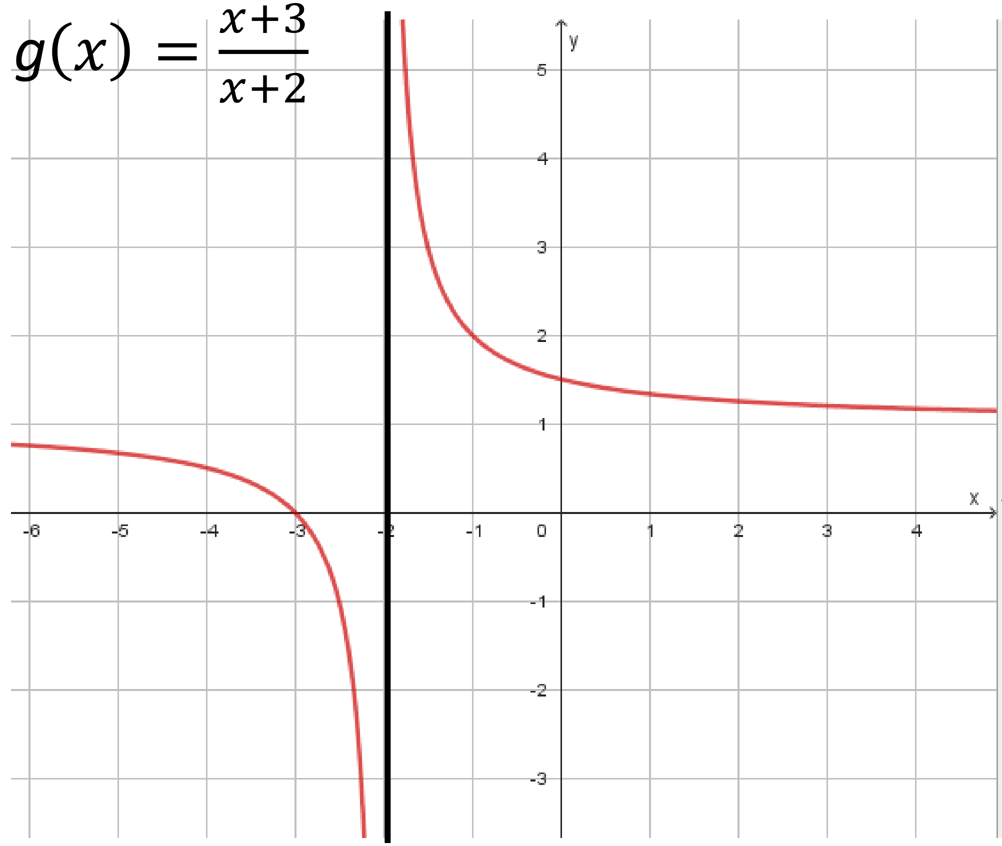
ASÍNTOTAS VERTICALES

$$f(x) = \frac{-1}{x-1}$$



Asíntota vertical en x=1

$$g(x) = \frac{x+3}{x+2}$$



Asíntota vertical en x=-2

Ejemplos…

Calcular los siguientes límites y decidir si las funciones tienen asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^3 + 4x} =$$

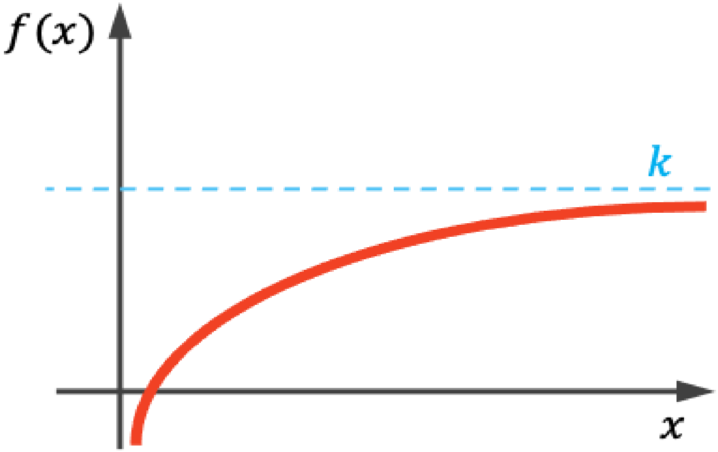
$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} + 3 =$$

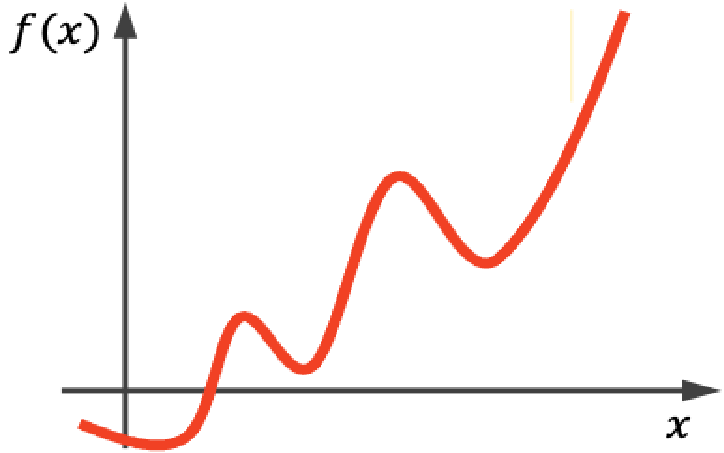
Imagen
de 3dman_eu en Pixabay

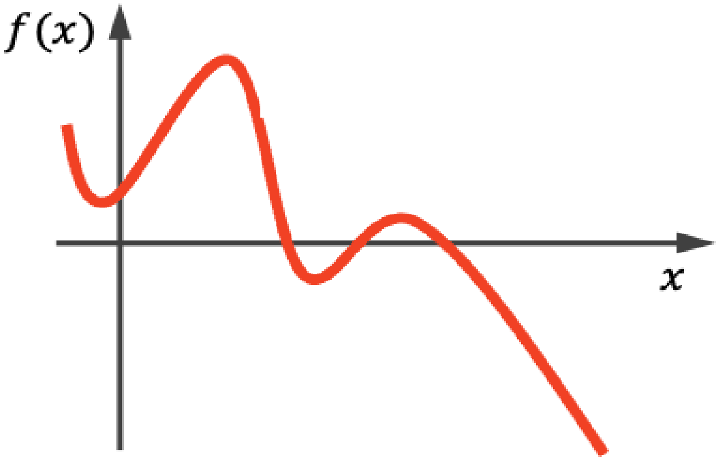
LÍMITES CUANDO x TIENDE A INFINITO

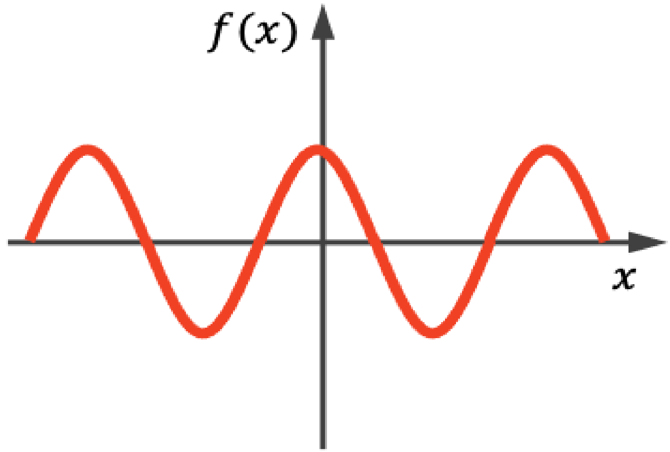
MIREMOS ESTAS GRÁFICAS DE FUNCIONES…

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay



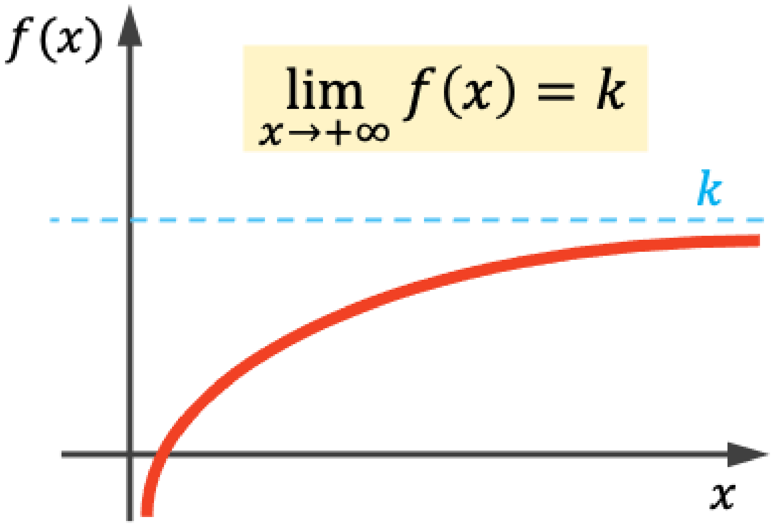




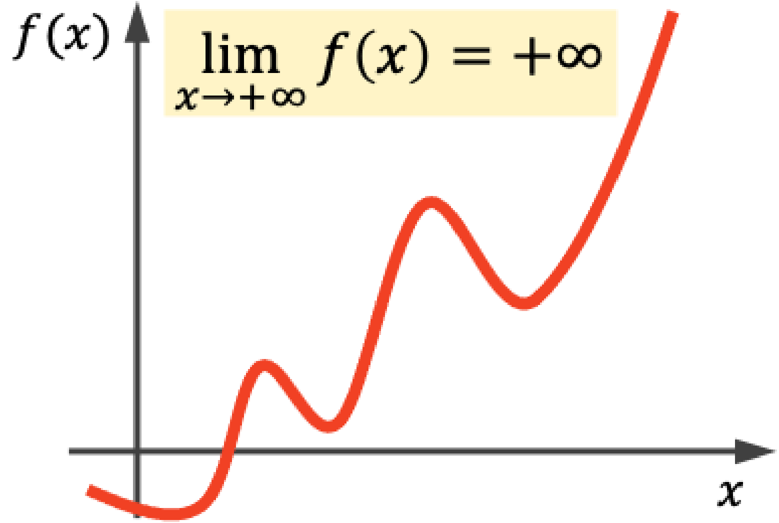


LÍMITES CUANDO x TIENDE A INFINITO

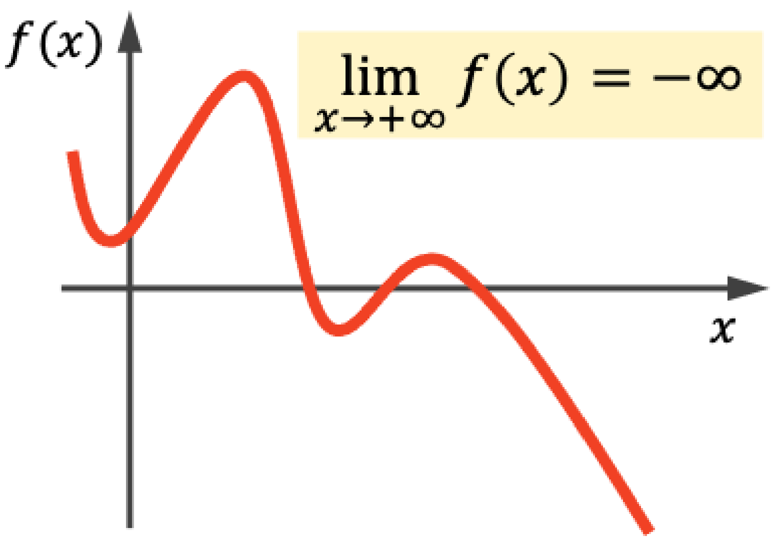
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$



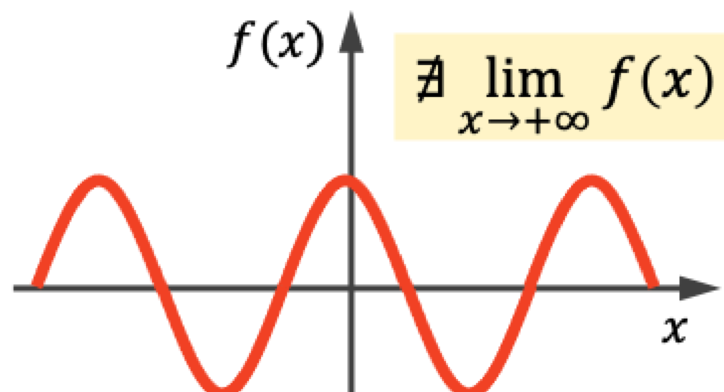
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$



$$\nexists \lim_{x \to +\infty} f(x)$$



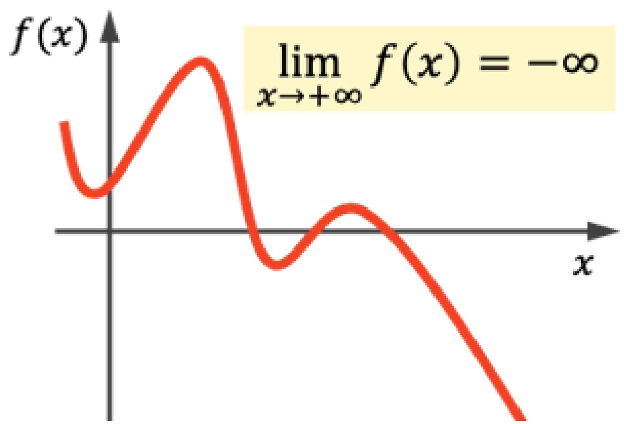
LÍMITES CUANDO x TIENDE A INFINITO

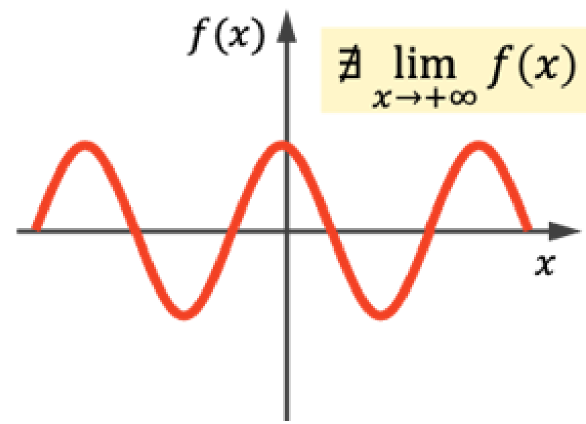
Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

ENTONCES, SI LA VARIABLE INDEPENDIENTE TIENDE A INFINITO…

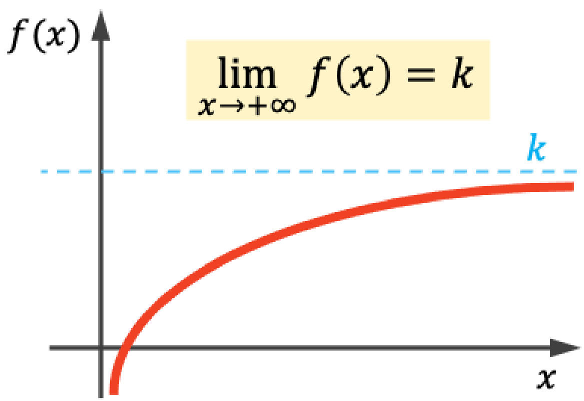
Lo escribimos: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Estos límites NO EXISTEN





Este límite EXISTE



$\boldsymbol{y = k}$

ES ASÍNTOTA HORIZONTAL de f

Ejemplos…

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-1)^2} + 3 =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}(x^3 + x^2) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 + 5x^2 + 3 =$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

DEFINIMOS…

Si se tiene que:

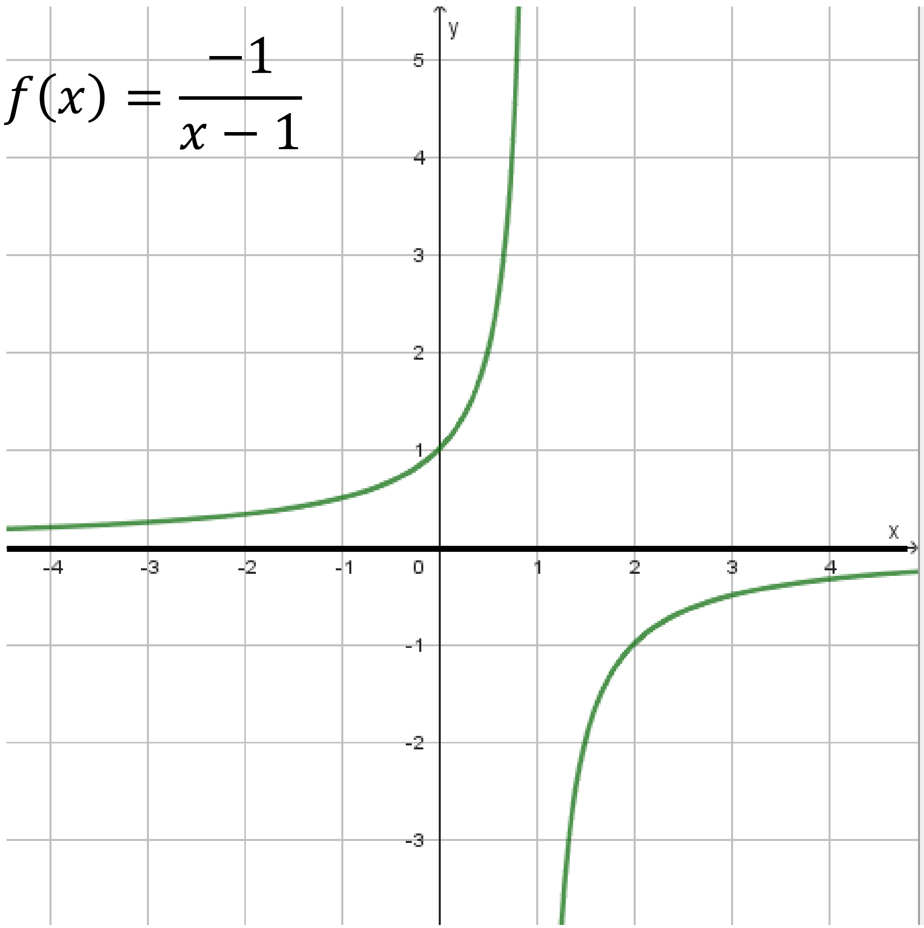
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Entonces se dice que la función $f(x)$ tiene una ASÍNTOTA HORIZONTAL y es la recta horizontal $\boldsymbol{y = L}$.

Volvamos a las funciones anteriores… y miremos sus gráficas…

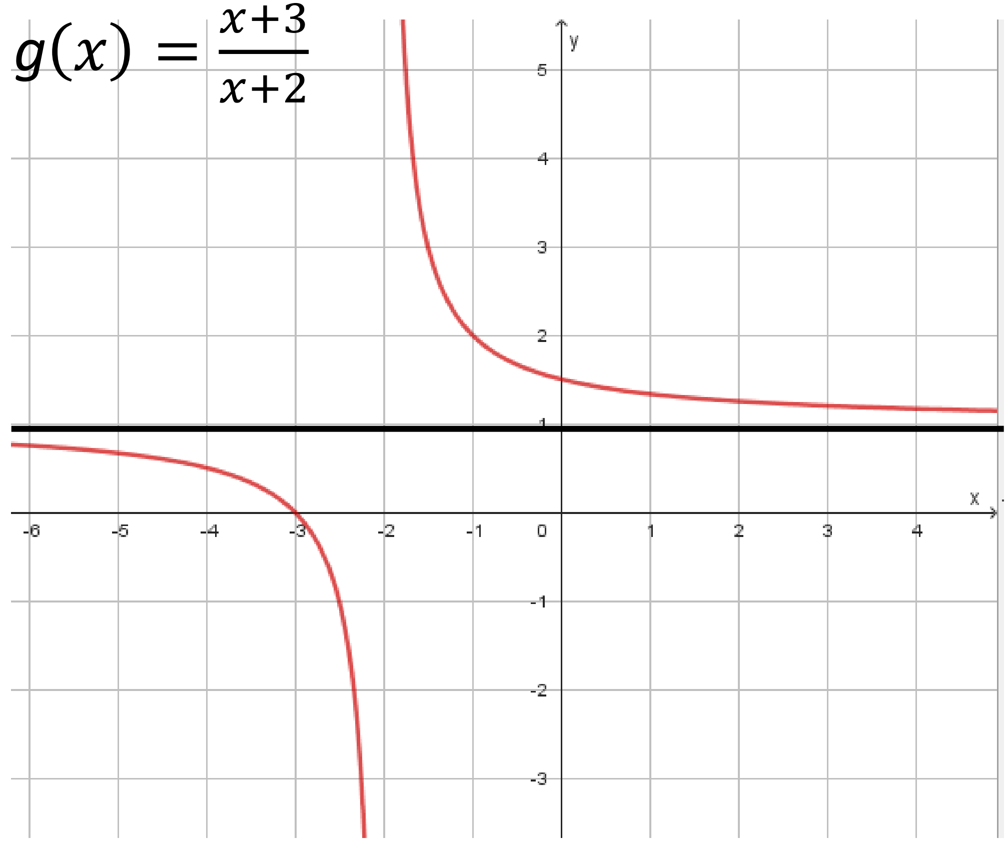
ASÍNTOTAS HORIZONTALES

$$f(x) = \frac{-1}{x-1}$$



Asíntota horizontal en y=0

$$g(x) = \frac{x+3}{x+2}$$



Asíntota horizontal en y=1

Matemática

Clase 23 – Martes 12/9

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

22	4-sep	Tema 11: Límite y continuidad	Trabajo Práctico N°9: Límite y continuidad
23	11-sep	Tema 11: Límite y continuidad	Trabajo Práctico N°9: Límite y continuidad

LÍMITES INDETERMINADOS

HASTA AHORA VIMOS…

Límites que se pueden resolver directamente reemplazando.

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1} x^3 - 5x^2 + 3 = \\ \lim_{x \to 2} \dfrac{3}{x^2} = \end{cases}$$

Usamos límites laterales

$$\lim_{x \to -1} f(x) \text{ con: } f(x) = \begin{cases} \ln(x+2) & x \leq -1 \\ x^2 + 1 & x > -1 \end{cases}$$

Límites de funciones del tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$ donde el denominador tiende a cero y el numerador NO tiende a cero

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{x-1} =$$

Límites donde x tiende a infinito

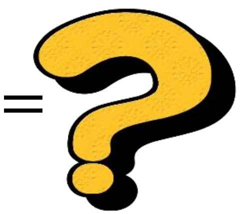
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x x^2} =$$

LÍMITES INDETERMINADOS

PERO EXISTEN OTROS TIPOS DE LÍMITES EN LOS QUE TENDREMOS QUE REALIZAR ALGUNAS OPERACIONES …

¿Qué propiedad podemos usar en este límite?

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} =$$



Si f y g son dos funciones que valen lo mismo en un intervalo I alrededor de a, salvo quizás en a. Es decir:

$$f(x) = g(x)\ para\ todo\ x \in I, x \neq a$$

Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

¿Qué propiedad podemos usar en este caso?

¿Se acuerdan que dijimos que $\boldsymbol{x \to a}$ implicaba que $\boldsymbol{x \neq a}$?

$$\underbrace{\lim_{x\to -1}}_{\boldsymbol{x \neq -1}} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{x+1}}{\underbrace{(x-1)\cancel{(x+1)}}_{\text{Válido porque } \boldsymbol{x \neq -1}}} = \underbrace{\lim_{x\to -1} \frac{1}{(x-1)}}_{\text{Se convirtió en un límite que se puede resolver por propiedades}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplos…

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x^3 + 4x} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{3x - 9}{9 - x^2} =$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{sen^2 x + sen\,(x) \cos x}{sen\ x} =$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

LÍMITES INDETERMINADOS

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

LOS LÍMITES ANTERIORES SE LLAMAN INDETERMINADOS…

Lo que significa que no se pueden determinar…

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

VEAMOS ALGUNOS DE LOS TIPOS DE LIMITES INDETERMINADOS QUE EXISTEN

LÍMITES INDETERMINADOS

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

TIPOS DE INDETERMINACIÓN
(a puede ser cualquier número real y también ∞)

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

$$f(x)g(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

LÍMITES INDETERMINADOS

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

TIPOS DE INDETERMINACIÓN
(a puede ser cualquier número real y también ∞)

$$f(x) + g(x)$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = -\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = +\infty}$$

Ejemplos…

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x^3 + 4x} =$$

$$\lim_{x \to \infty} x^3 - 5x^2 + 3 =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{3x - 9}{9 - x^2} =$$

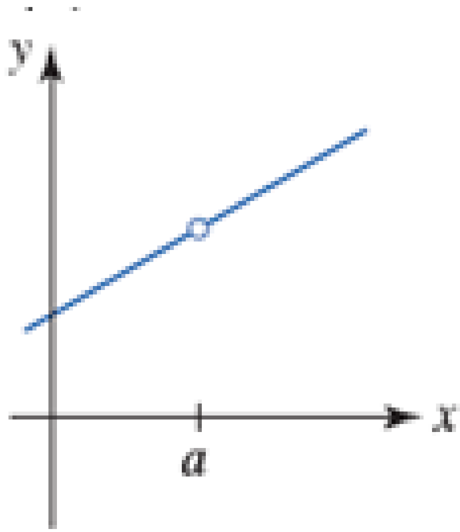
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} (x^3 + x) =$$

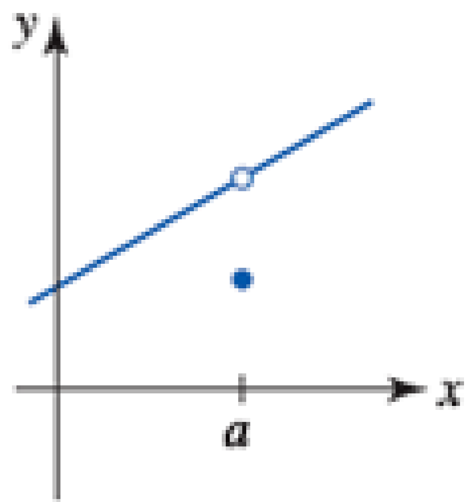
$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x^3 + 4x} =$$

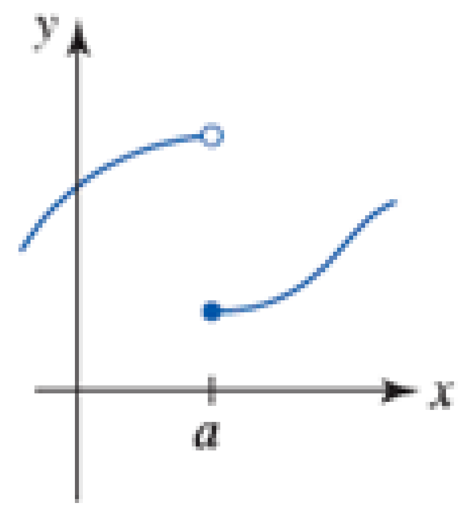
$$\lim_{x \to \pi} \frac{sen^2 x + sen\,(x) \cos x}{sen\, x} =$$

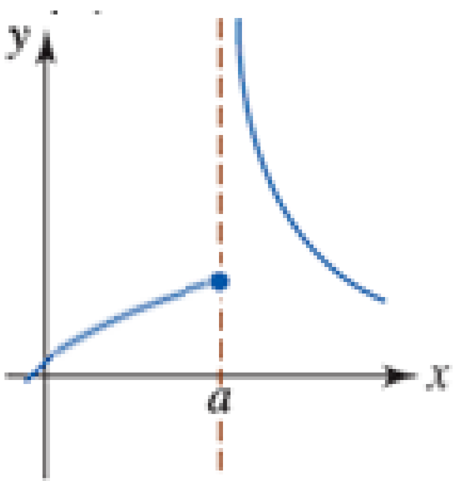
Imagen de 3dman_eu en Pixabay

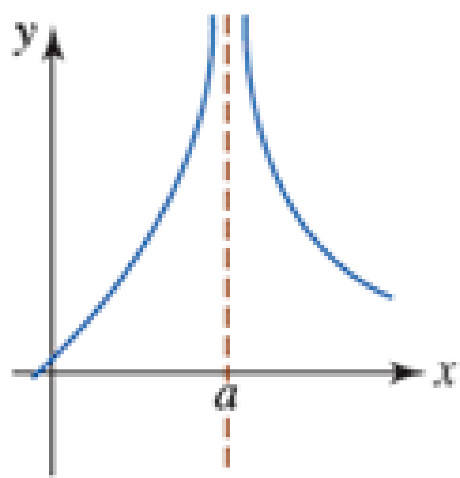
CONTINUIDAD DE FUNCIONES

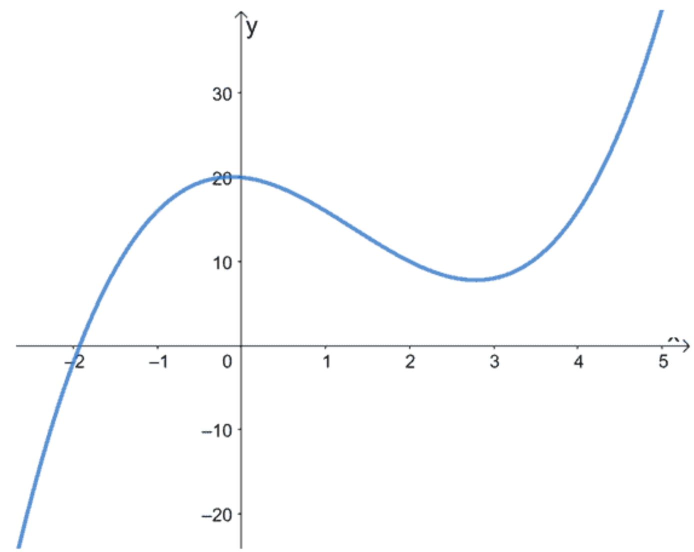












CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

VEMOS LA DEFINICIÓN…

La función f es continua en $x = a$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1) Existe $f(a)$

2) Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

La función f es continua en un intervalo I si es continua en cada punto del intervalo.

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

PROPIEDADES…

Si f y g son funciones continuas en $x = a$ y c es una constante, entonces las siguientes funciones son también continuas en $x = a$:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. cf
4. fg
5. $\frac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

ALGUNAS FUNCIONES QUE SON CONTINUAS

- ✓ Las funciones polinómicas en todo su dominio.
- ✓ Las funciones racionales en todo su dominio.
- ✓ Las funciones algebraicas en todo su dominio.
- ✓ La función exponencial en todo su dominio.
- ✓ La función logaritmo natural en todo su dominio.
- ✓ Las funciones trigonométricas en todo su dominio.

Estudiemos la continuidad
de otras funciones…

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Ejemplos…

Estudiar la continuidad de la siguiente función en $t = 0$ y graficarla:

$$w(t) = \begin{cases} e^t & t \leq 0 \\ \frac{1}{2}t + 1 & t > 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de la siguiente función en todo su dominio y graficarla:

$$h(x) = \begin{cases} \ln(x) & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + 2 & x > 1 \end{cases}$$

Matemática

Clase 24 – Martes 19/09

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

Clase	Semana	Tema de la Semana	Práctica
24	18-sep	Tema 12: Derivada	Trabajo Práctico N°10: Derivadas
25	25-sep	Tema 12: Derivada	Trabajo Práctico N°10: Derivadas
26	2-oct	Tema 13: Aplicaciones de la derivada	Trabajo Práctico N°11: Estudio del crecimiento y concavidad de funciones
27	9-oct	Tema 13: Aplicaciones de la derivada	Trabajo Práctico N°11: Estudio del crecimiento y concavidad de funciones

Velocidad promedio y velocidad instantánea

Supongamos que se deja caer una pelota desde una cierta altura de manera que la función que describe la distancia recorrida por la pelota, después t segundos es $s(t) = 4.9t^2$, donde $s(t)$ se mide en metros.

Nos interesa determinar la velocidad de la pelota luego de 1 segundo, es decir para t = 1.

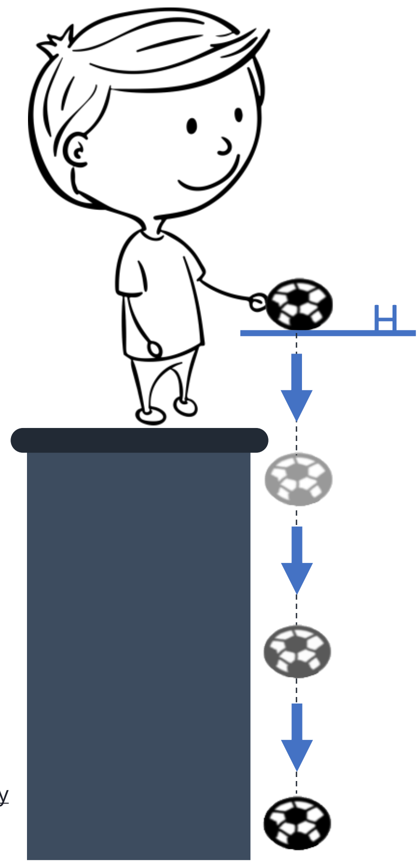
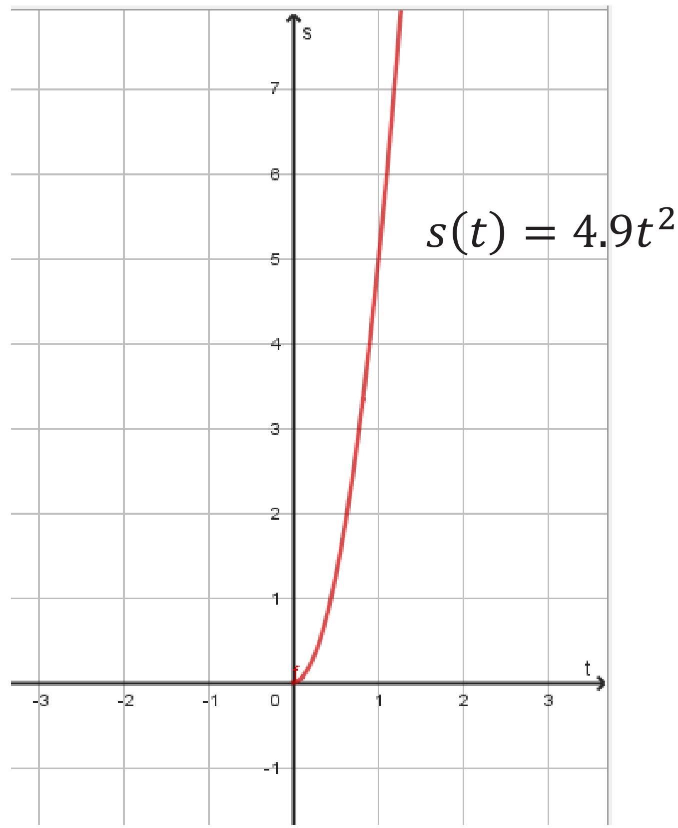


Imagen de GDJ en Pixabay



Velocidad promedio y velocidad instantánea

Si nos interesa conocer la ***velocidad promedio*** entre dos instantes cualquiera del recorrido de la pelota, tendríamos que calcularla como:

$$v_{prom} = \frac{cambio\ en\ la\ posición}{tiempo\ transcurrido} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si en cambio nos preguntamos cómo determinar la velocidad de la pelota en un instante, es decir la ***velocidad instantánea***, ya no tenemos intervalo para utilizar en la expresión anterior…

¡LA DIFICULTAD RESIDE EN QUE YA NO CONTAMOS CON UN INTERVALO DE TIEMPO, PORQUE NOS INTERESA SOLAMENTE UN INSTANTE!

¿Entonces?

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Velocidad promedio y velocidad instantánea

¡¡Aproximamos la velocidad en un instante mediante velocidades promedios en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, cercanos al instante que se pide!! Calculemos la *velocidad promedio*, v_{prom}, para algunos de intervalos:

La velocidad promedio desde $t = 1$ hasta $t = 1{,}1$ es:

$$v_{prom} = \frac{s(1{,}1) - s(1)}{1{,}1 - 1} = \frac{4{,}9(1{,}1)^2 - 4{,}9(1)^2}{0{,}1} = \frac{1{,}029}{0{,}1} = 10{,}29$$

La velocidad promedio desde $t = 0{,}9$ hasta $t = 1$ es:

$$v_{prom} = \frac{s(1) - s(0{,}9)}{1 - 0{,}9} = \frac{4{,}9(1)^2 - 4{,}9(0{,}9)^2}{0{,}1} = \frac{0{,}931}{0{,}1} = 9{,}31$$

Velocidad promedio y velocidad instantánea

La siguiente tabla muestra los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio durante períodos de tiempo cada vez más pequeños:

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
1<t<1,1	10,29
1<t<1,01	9,849
1<t<1,001	9,8049
0,999<t<1	9,7951
0,99<t<1	9,751
0,9<t<1	9,31

Parece que, a medida que acorta el período de tiempo, la velocidad promedio es cada vez más cercana a 9,8 m/s.

La velocidad instantánea cuando $t = 1$ se define como el valor del límite de estas velocidades promedio cuando el $\Delta t \to 0$, es decir cuando $t_2 \to t_1$.

Velocidad instantánea … La derivada

La velocidad instantánea en $t = 1$ se define como el valor del límite de estas velocidades promedio cuando el $\Delta t \to 0$, es decir cuando $t_2 \to t_1$.

¡Ya sabemos calcular este límite! Lo hacemos…

Llamamos $v(t)$ a velocidad instantánea de la pelota, en el instante t:

$$v(1) = \lim_{t_2 \to 1} \frac{s(t_2) - s(1)}{t_2 - 1}$$

En matemática, llamamos a este límite DERIVADA DE LA FUNCIÓN $s(t)$ EN $t = 1$.

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Velocidad instantánea … La derivada

¡También podemos escribirlo así!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$v(1) = \lim_{t_2 \to 1} \frac{\overbrace{s(t_2) - s(1)}^{\substack{v_{prom} \\ \text{desde } t = 1 \\ \text{hasta } t = t_2}}}{t_2 - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{s(1+h) - s(1)}^{\substack{v_{prom} \\ \text{desde } t = 1 \\ \text{hasta } t = 1 + h}}}{h}$$

Tomando a $t_2 = 1 + h$

Definición de Derivada

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡Definamos formalmente DERIVADA de una función!

Dada una función $f(x)$, se define la **función derivada de $f(x)$**, al siguiente límite, si este existe:

NOTACIÓN

$$\boxed{f'(x)=\frac{df}{dx}} = \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\text{Cociente de Newton o cociente incremental}}$$

En términos del problema inicial es la **velocidad promedio** entre x y $x+h$

Definición de Derivada

Ejemplo 1:

Determinar la derivada, usando su definición, de:

1) $f(x) = x^2$
2) $g(x) = 2x + 3$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Interpretación Geométrica. La recta tangente

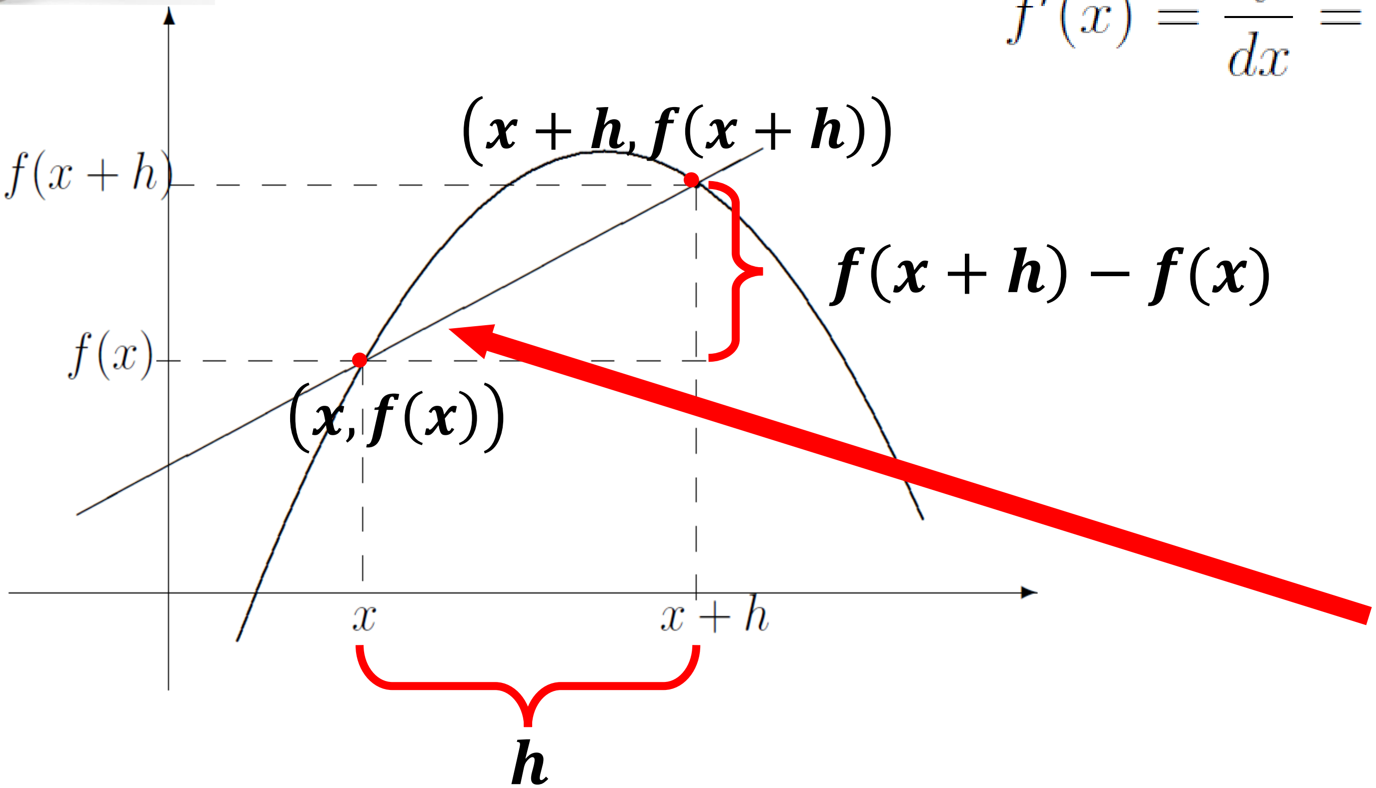
Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡Ahora veamos la interpretación geométrica de la derivada!

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Cociente de Newton

Pendiente de la **recta secante** en los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$

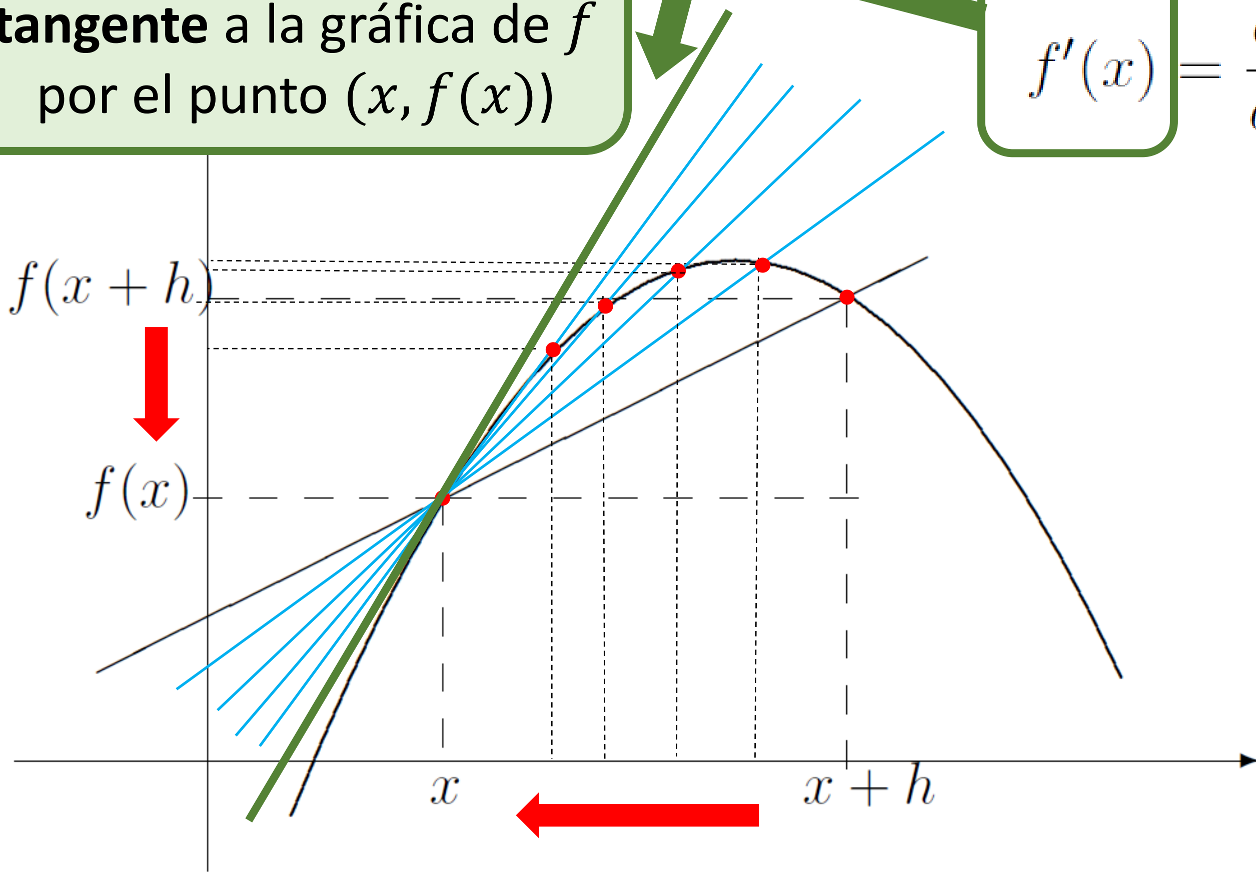


Interpretación Geométrica. La recta tangente

Si h tiende a cero, entonces $x+h$ se acerca a x y $f(x+h)$ se acerca a $f(x)$, entonces se van modificando las pendientes de las rectas secantes.

Pendiente de la **recta tangente** a la gráfica de f por el punto $(x, f(x))$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$



Cociente de Newton

Pendiente de la **recta secante** en los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$

Interpretación Geométrica. La recta tangente

¿Entonces?

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

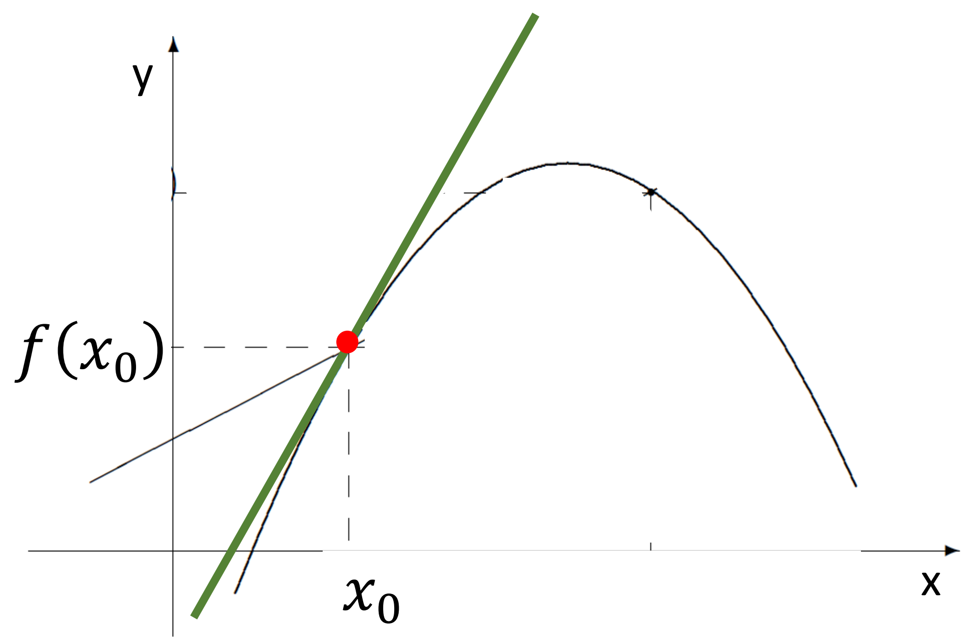
El valor de la derivada de la función f en x_0, es decir $f'(x_0)$, es la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de f por el punto $\left(x_0, f(x_0)\right)$.

Como la ecuación de una recta es:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

La ecuación de dicha recta tangente es:

$$\boxed{y - \underbrace{f(x_0)}_{y_0} = \underbrace{f'(x_0)}_{m}(x - x_0)}$$



Interpretación Geométrica. La recta tangente

Ejemplo 2:

- ✓ Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $x_o = 2$ y de $g(x) = 2x + 3$ en $x_o = 5$.
- ✓ Graficar ambas funciones y las rectas tangentes encontradas.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

¿Por qué nos interesa encontrar la recta tangente a la gráfica de una función?

¿Esto tendrá alguna utilidad?

La recta tangente como aproximación lineal de f(x)

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

La recta tangente es una recta que *solamente toca* a la gráfica de la función en el punto de tangencia (es decir la toca, pero no la cruza)

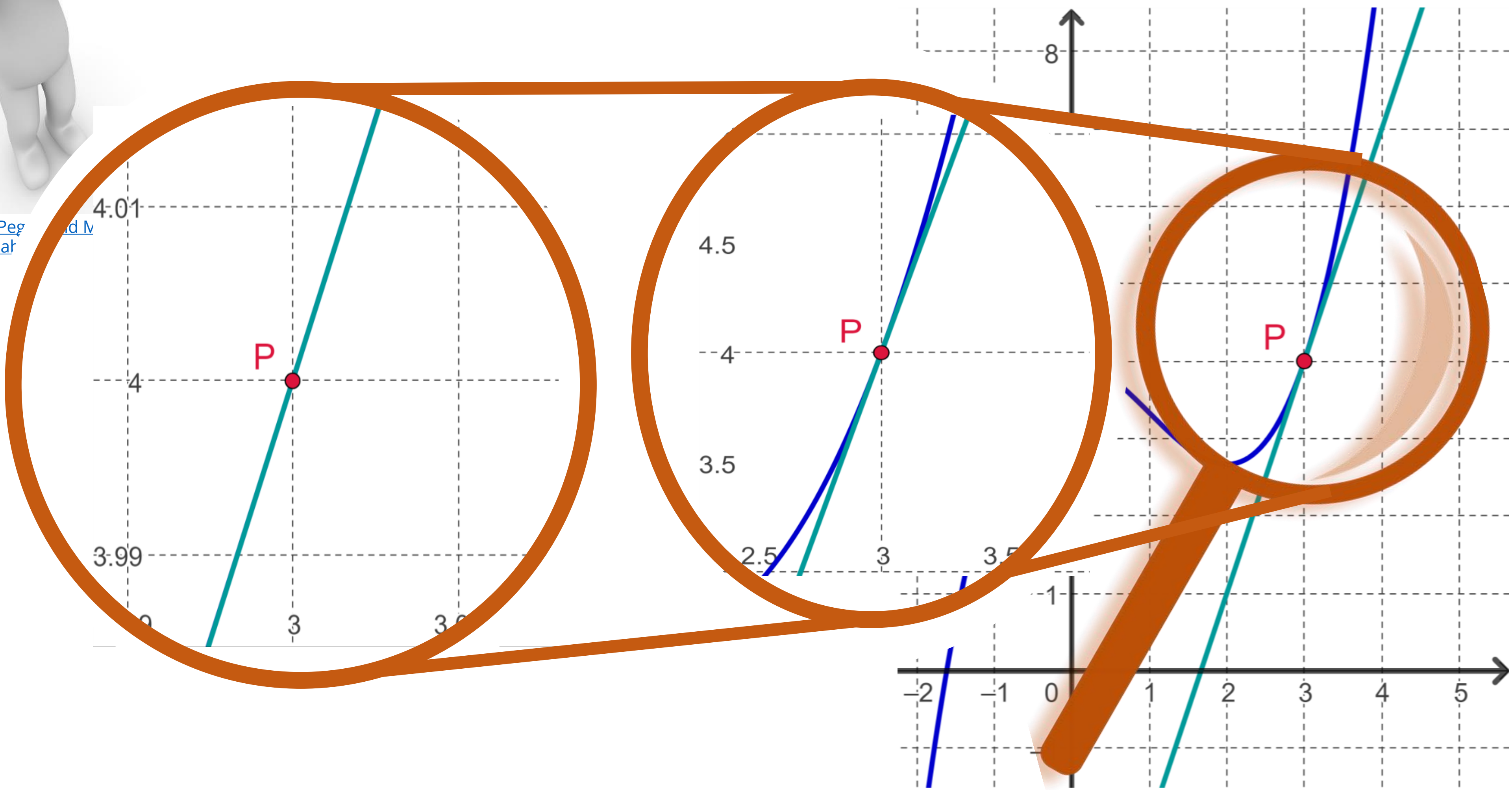
¿Pero qué tiene de especial la recta tangente? …

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

La recta tangente como aproximación lineal de f(x)

Observemos qué pasa cerca del punto P…

Imagen de Peg ld M
Anke en Pixab



La recta tangente como aproximación lineal de f(x)

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Mientras más *zoom* le hacemos a la imagen, más parecidas son las gráficas de $f(x)$ y de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $P\left(x_o, f(x_o)\right)$

De hecho, dicha recta tangente es, de todas las rectas que existen, la que más se parece a $f(x)$ para valores de x cercanos x_o

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Por lo tanto, se puede aproximar la función $f(x)$, para x cercanos x_o, mediante la función lineal $L(x)$ cuya gráfica es la recta tangente a $f(x)$ en el punto $P\left(x_o, f(x_o)\right)$.

Esto se conoce como ***aproximación lineal*** de $f(x)$, alrededor de x_o

La recta tangente como aproximación lineal de f(x)

Ejemplo 3:

- ✓ Encontrar una aproximación lineal a la función $h(x) = x^2 - 3$ alrededor de $x_o = 1$.
- ✓ Graficar la función y su aproximación lineal.
- ✓ ¿Para qué intervalo de valores x consideran que esta es una buena aproximación de la función $h(x)$?

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

La recta tangente como aproximación lineal de f(x)

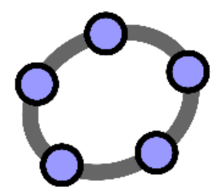
Recién dijimos que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $P\left(x_o, f(x_o)\right)$ es, de todas las rectas que existen, la que más se parece a $f(x)$ para valores de x cercanos x_o

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

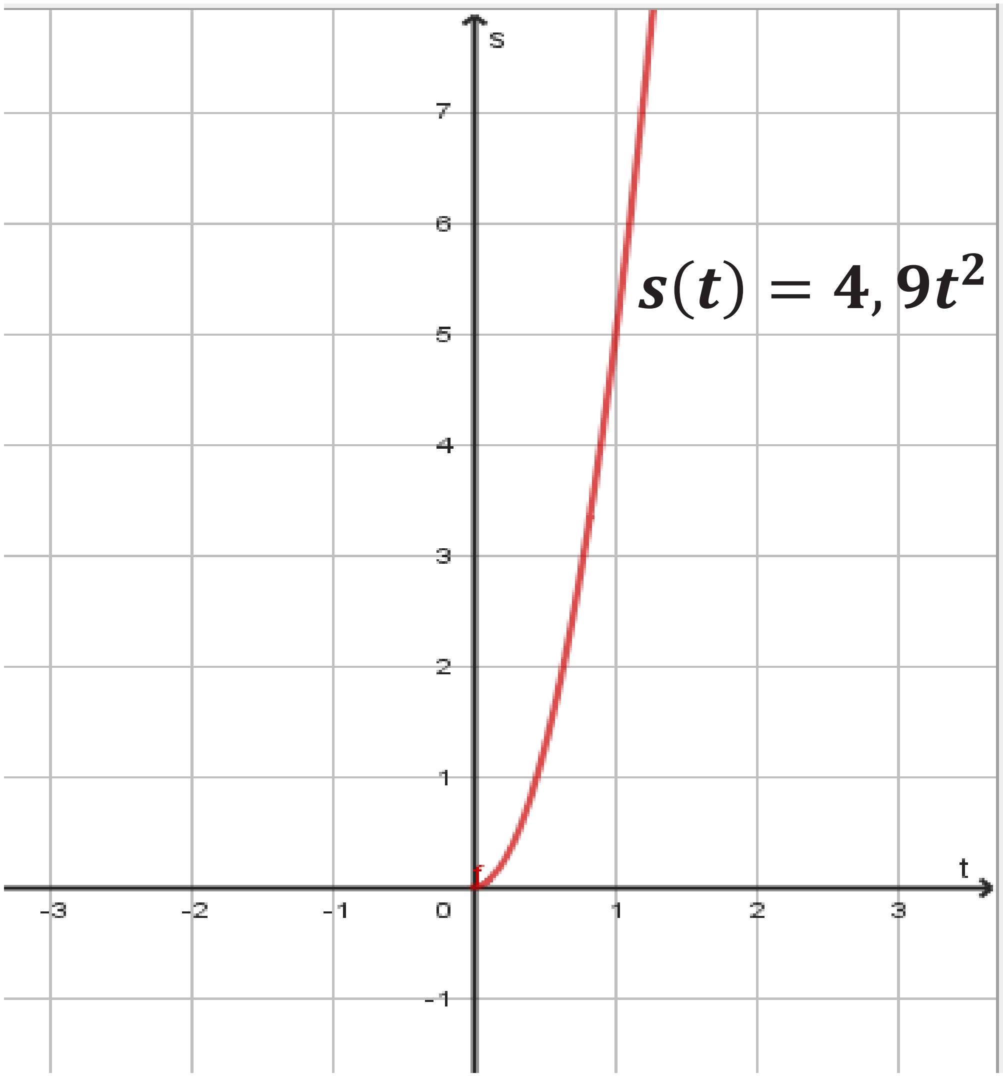
¿Pero esto será cierto siempre?

Imagen de Christian Dorn en Pixabay

¡¡Vamos al GeoGebra!!



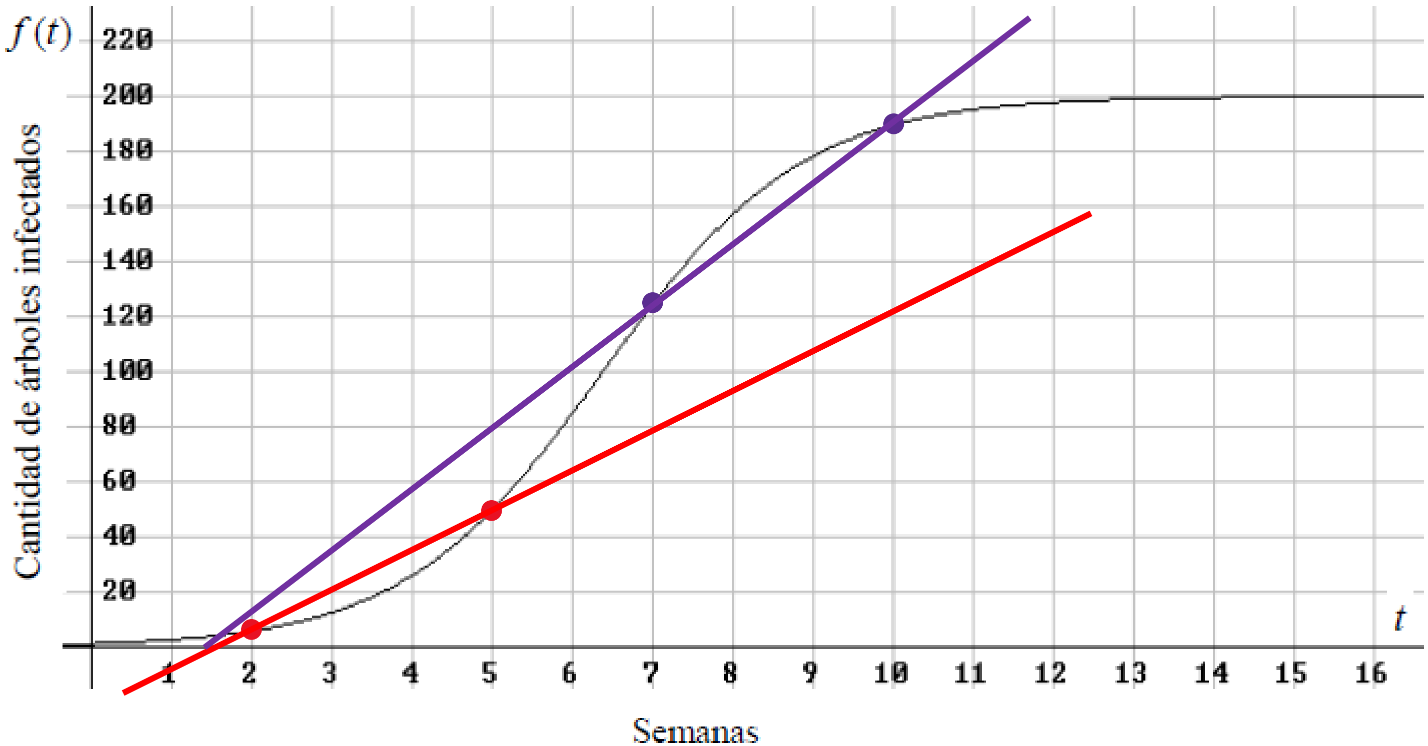
Derivada de una función



En el problema inicial nos interesaba determinar la **velocidad de la pelota luego de 1 segundo**.

Analíticamente: calculamos la derivada de $s(t)$ en t =1 y de esa manera determinamos la velocidad de la pelota luego de 1 segundo.

Gráficamente: podríamos estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $s(t)$en t =1.



Se estima que t semanas después de la irrupción de un virus en una plantación de durazneros, el número de árboles infectados, $f(t)$, puede calcularse a través de un modelo matemático, dado por la función cuyo gráfico es el mostrado en la imagen.

De acuerdo al gráfico:

- ¿La velocidad media de contagio del virus en la plantación de durazneros entre las semanas segunda y quinta es mayor o menor que entre las semanas séptima y la décima?
- ¿En qué semana estiman que fue mayor la velocidad (instantánea) de contagio del virus?
- ¿Qué sucede con los contagios a partir de la semana 14? ¿Cuánto es la velocidad instantánea de contagios a partir de dicha semana?

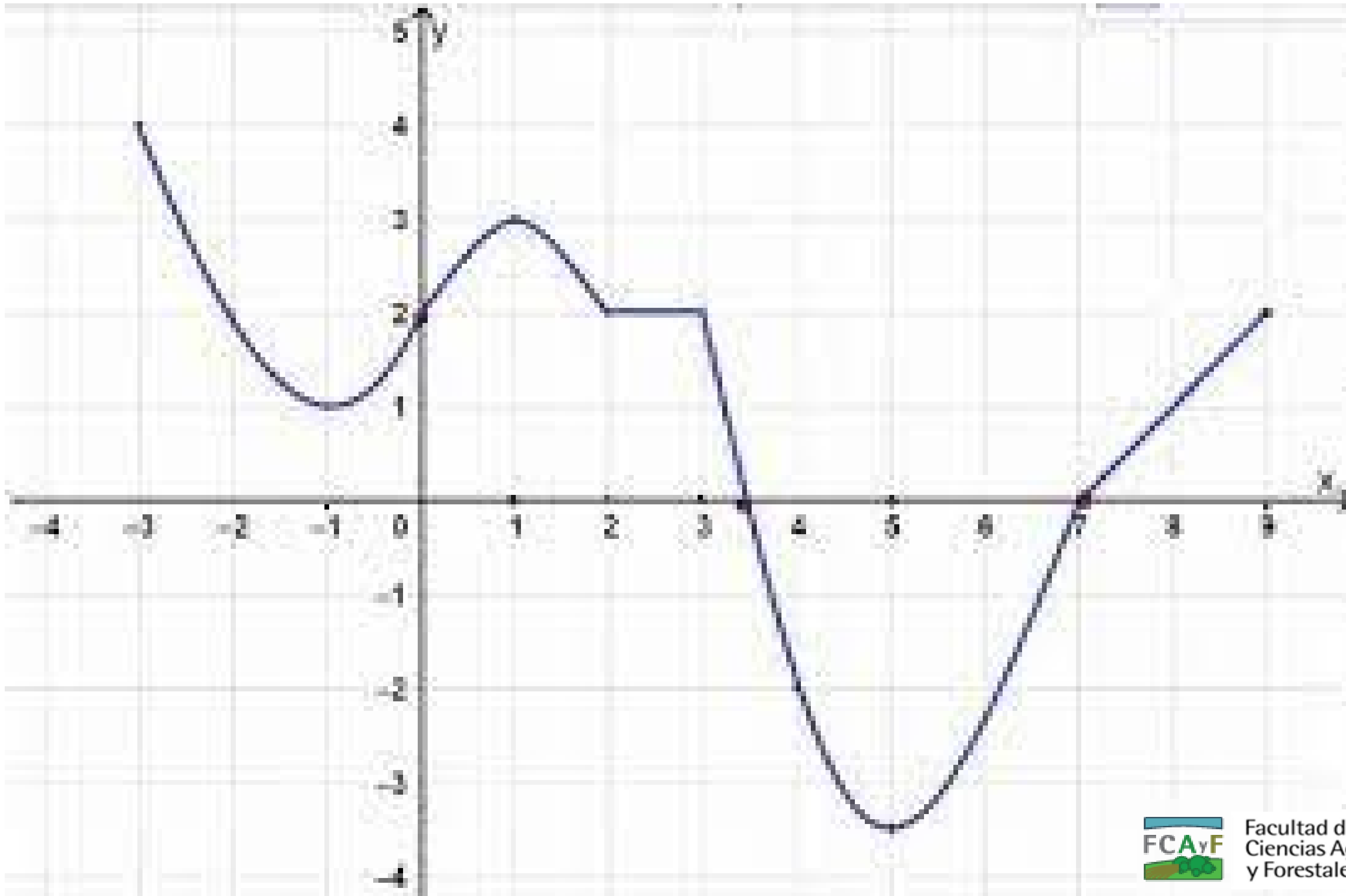
La siguiente gráfica muestra la cantidad total de gasolina medida en litros, A, en el tanque (de gasolina) de un tractor después de haberlo conducido por t horas.

- Determinen la velocidad media de consumo de gasolina entre las 4 y 6 horas de haber conducido el tractor.
- La velocidad de consumo fue mayor a la hora o a las cuatro horas de haber conducido el tractor.
- Si conocieran la expresión de la función que modeliza la situación, ¿cómo harían para responder los dos puntos anteriores?

Si la siguiente es la gráfica de una función f:

- ¿Es mayor $f'(-2)$ o $f'(0)$?
- ¿Es mayor $f'(6)$ o $f'(8)$?
- ¿Qué relación hay entre $f'(-1)$ y $f'(1)$?
- ¿Qué sucede en el Intervalo $(2,3)$? ¿Y en el intervalo $(7,9)$?

¿Por qué?



Existencia de la derivada

Pensemos…
¿Qué significa que una función $f(x)$ sea *derivable* en un punto $x = x_0$?

Que $f(x)$ tenga derivada en x_0

Es decir….

Que exista el $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Y geométricamente…

Que exista una recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ por el punto $(x_0, f(x_0))$

Existencia de la derivada

¿Y cuándo una función $f(x)$ **NO** es derivable en un punto x_0?

Analíticamente

Si **NO EXISTE** el

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Gráficamente

Si **No EXISTE** una recta tangente a la gráfica de la función f por el punto $(x_0, f(x_0))$

Existencia de la derivada

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Veamos un TEOREMA que sirve para saber si una función es derivable en un punto

¡OJO!
¡La inversa no vale!

Teorema:

Si f es derivable en $x = x_o$ $\Longrightarrow f$ es continua en $x = x_o$

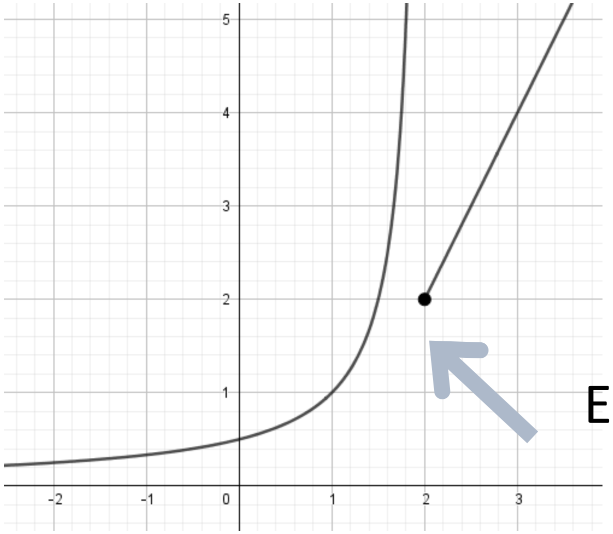
Existen funciones que son continuas y NO son derivable en algún $x = x_o$.

SI VALE

Si f es NO es continua en $x = x_o$ $\Longrightarrow f$ NO es derivable en $x = x_o$

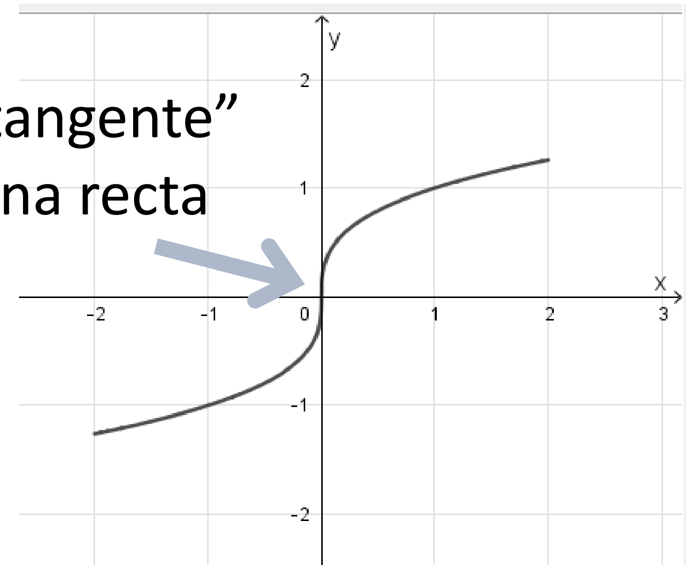
Existencia de la derivada

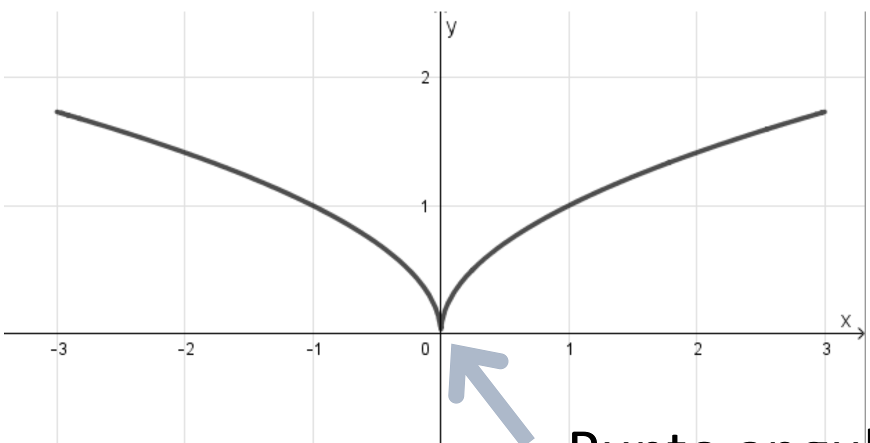
Gráficamente



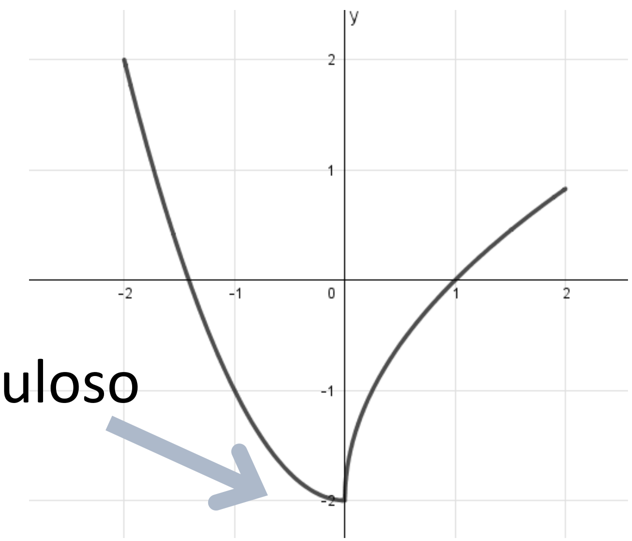
Es discontinua en x_0

La “recta tangente” en x_0 es una recta vertical





Punto anguloso



Punto anguloso

Existencia de la derivada

Entonces... si queremos determinar si una función es derivable (que tenga derivada):

- Si la función **no es continua** en un punto, entonces la función **no es derivable** en ese punto.
- Si la función **es continua**, debemos **calcular el límite del cociente de Newton** en el punto que nos interesa.

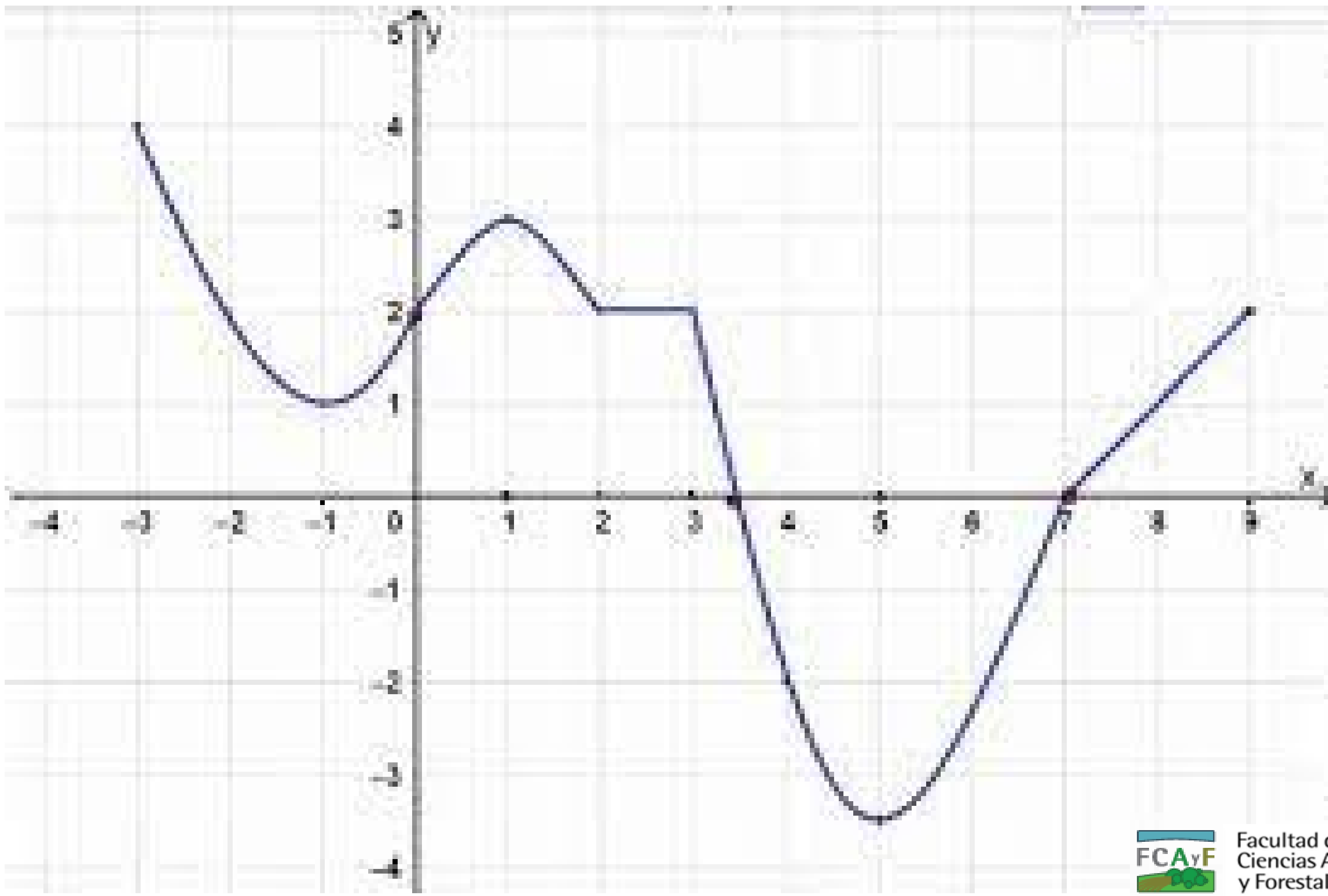
→ Si el **límite existe**, f **es derivable** en el punto.

→ Si el **límite no existe**, f **no es derivable** en el punto.

Existencia de la derivada

¿Hay algún valor de x para el cual la función no es derivable?

¿Por qué?



Matemática

Clase 25 – Martes 26-9

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

Clase	Semana	Tema de la Semana	Práctica
24	18-sep	Tema 12: Derivada	Trabajo Práctico N°10: Derivadas
25	25-sep	Tema 12: Derivada	Trabajo Práctico N°10: Derivadas
26	2-oct	Tema 13: Aplicaciones de la derivada	Trabajo Práctico N°11: Estudio del crecimiento y concavidad de funciones
27	9-oct	Tema 13: Aplicaciones de la derivada	Trabajo Práctico N°11: Estudio del crecimiento y concavidad de funciones

Repaso: La Derivada

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡Recordemos!

Si f es una función y x un número en el dominio de f, entonces **la derivada de f** en x se define como el siguiente límite, si existe:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Derivada

Pendiente de recta tangente

Velocidad instantánea o velocidad

Cociente de Newton

Pendiente de recta secante

Velocidad media

Repaso: La Derivada

Supongamos que queremos calcular las derivadas de las siguientes funciones…

$$f(x) = 20x^5 - 4x^3$$

$$g(x) = \frac{20x^5 - 4x^3}{x - 3}$$

Reglas de Derivación

La derivada de una función constante

Si $f(x) = k,$ entonces $f'(x) = 0$

La derivada de la función identidad

Si $f(x) = x,$ entonces $f'(x) = 1$

La derivada de una constante por una función

Si $f(x)$ es una función derivable y k es un constante, entonces:

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$$

La derivada de una función potencia

Si $f(x) = x^r$, siendo r un número real distinto de cero, entonces

$$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

Reglas de Derivación

La derivada de una suma

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La derivada de un producto

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

La derivada de un cociente

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables y $g(x) \neq 0$, entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Reglas de Derivación

¡¡¡Ahora SÍ derivemos las funciones anteriores usando las reglas enunciadas!!!

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplo 1:

Determinar la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = 20x^5 - 4x^3$$

$$g(x) = \frac{20x^5 - 4x^3}{x - 3}$$

Derivadas de algunas funciones

Si $f(x) = sen(x)$ entonces $f'(x) = \cos(x)$

Si $f(x) = cos(x)$ entonces $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

Si $f(x) = e^x$ entonces $f'(x) = e^x$

Si $f(x) = \ln(x)$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$

Derivadas de algunas funciones

¡¡¡Y ahora derivemos más funciones!!!

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplo 2:

Determinar la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = 20x^{-3} - 4\ln(x) + \cos(x)$$

$$g(x) = \frac{e^{x} - 4\sqrt{x}}{sen(x)}$$

Derivadas de algunas funciones

Ejemplo 3:

Encontrar la recta tangente de la siguiente función en

$$x_o = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = 2\cos(x) + 1$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Matemática

Clase 26 – Martes 3-10

FCAyF Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

Clase	Semana	Tema de la Semana	Práctica
24	18-sep	Tema 12: Derivada	Trabajo Práctico N°10: Derivadas
25	25-sep	Tema 12: Derivada	Trabajo Práctico N°10: Derivadas
26	2-oct	Tema 13: Aplicaciones de la derivada	Trabajo Práctico N°11: Estudio del crecimiento y concavidad de funciones
27	9-oct	Tema 13: Aplicaciones de la derivada	Trabajo Práctico N°11: Estudio del crecimiento y concavidad de funciones

Reglas de Derivación

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡La semana pasada vimos algunas reglas de derivación!

Vimos la derivada de…

La función constante $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$

La función identidad $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

La función potencia $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$

Una constante por una función $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$

La suma de dos funciones $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

El producto de dos funciones $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

El cociente de dos funciones $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Reglas de Derivación

Ahora supongamos que queremos calcular la derivada de la siguiente función…

$$h(x) = (8x^3 + 5x^2 + 3)^{1/3}$$

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Composición de funciones

$$h(x) = (8x^3 + 5x^2 + 3)^{1/3}$$

Es una función compuesta

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Dada dos funciones f y g, llamamos **COMPOSICIÓN** de f con g a la función obtenida por la aplicación sucesiva de f y g, en ese orden. La denotamos como gof o $g(f(x))$:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "gof"] & f(x) \arrow[r] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Representación esquemática de la función compuesta gof

Composición de funciones

$$h(x) = (8x^3 + 5x^2 + 3)^{1/3}$$

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡Veamos quiénes serían f y g en este caso!

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "gof"] & f(x) \arrow[r] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Representación esquemática de la función compuesta gof

Composición de funciones

¿Y cómo se determina el dominio de una *función compuesta*?

$$Dom\,\underbrace{(gof)}_{g(f(x))} = \{x \in Dom(f): f(x) \in Dom(g)\}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "gof"] & f(x) \arrow[r] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Representación esquemática de la función compuesta gof

¿Cuál es el dominio de $h(x) = (8x^3 + 5x^2 + 3)^{1/3}$?

Composición de funciones

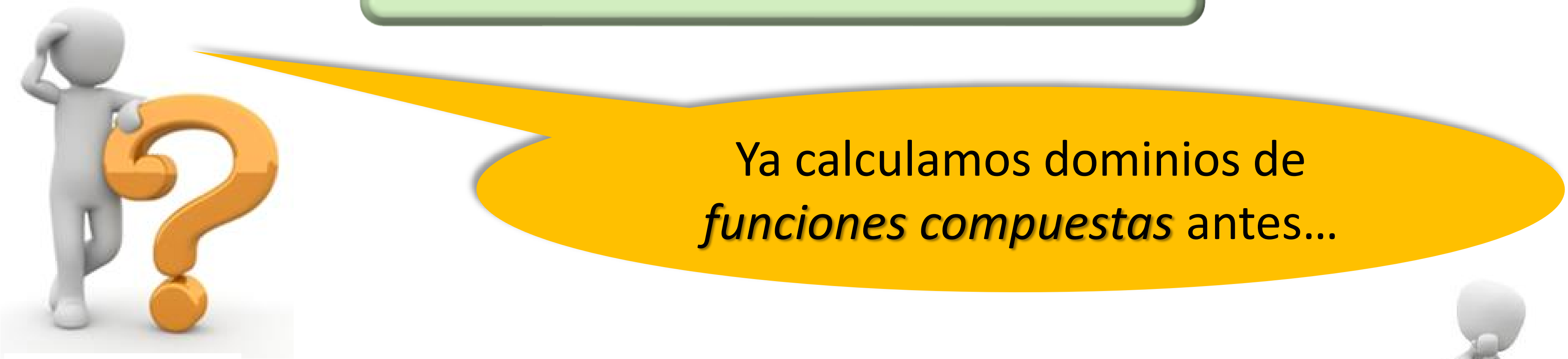


Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplo:

✓ Encontrar el dominio de la función compuesta $h(x) = ln(x^2 - 4)$

Composición de funciones

¿Pero… cómo calculamos la derivada de la función?

$$h(x) = (8x^3 + 5x^2 + 3)^{1/3}$$

Donde $h(x) = g\big(f(x)\big)$

Con $g(x) = x^{1/3}$ y $f(x) = 8x^3 + 5x^2 + 3$

REGLA DE LA CADENA

Dadas dos funciones numéricas f y g de manera que puede hacerse la composición gof y siendo funciones derivables en los dominios convenientes, entonces la **derivada de la función compuesta** $g\big(f(x)\big)$ está dada por:

$$\boxed{(\underbrace{gof}_{g(f(x))})'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x)}$$

REGLA DE LA CADENA

Ahora SÍ calculemos la derivada de la función (mediante la regla de la cadena…)

$$h(x) = (8x^3 + 5x^2 + 3)^{1/3}$$

Donde $h(x) = g\big(f(x)\big)$

Con $g(x) = x^{1/3}$ y $f(x) = 8x^3 + 5x^2 + 3$

REGLA DE LA CADENA

Ejemplos:

✓ Encontrar las derivadas de las siguientes funciones, utilizando regla de la cadena y otras reglas.

$$f(x) = 20(e^x + 4)^{-3} - 4\ln\left(x^2 + 1\right)$$

$$g(x) = \sqrt{sen(x) + x^3}$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

REGLA DE LA CADENA

¡A pensar!

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo:

✓ Si sabemos que:

$$f(0) = 4, f'(0) = -1$$

$$f(-3) = 1, f'(-3) = 2$$

$$g(0) = -3, g'(0) = 5$$

$$g(5) = -1, g'(5) = 6$$

✓ Calcular las siguientes derivadas

- $(2f \cdot g)'(0)$
- $(f - 3g)'(0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$
- $(f \circ g)'(0)$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

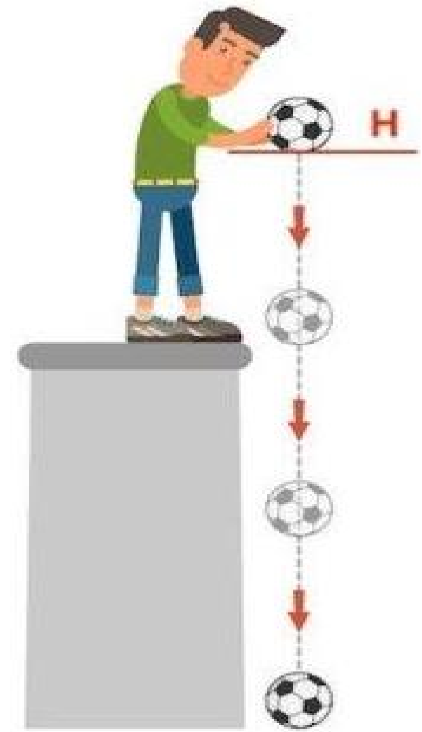
¡Ahora vamos a ver cómo se puede aplicar la derivada a algunos problemas de física!

Posición - Velocidad - Aceleración

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Vimos el ejemplo de dejar caer una pelota...

Y dijimos que la distancia recorrida por la pelota puede representarse con la siguiente función:



$$s(t) = 4{,}9t^2$$

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Posición – Velocidad - Aceleración

Veamos de dónde sale esa expresión y pensemos en otros ejemplos…

Derivada Segunda, tercera, …

Supongamos que tenemos una función $f(x)$ que es derivable…

La derivada de f es $f'(x)$, que es una nueva función

Como $f'(x)$ es una función … se podría derivar, siempre que sea derivable…

A la derivada de $f'(x)$ la llamamos derivada segunda y la notamos como: $f''(x)$

Derivada primera y segunda en física

Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta (en una dimensión) y si llamamos $\boldsymbol{s(t)}$ a la ***posición del objeto*** en función del tiempo, entonces:

La ***velocidad del objeto*** es: $\boldsymbol{v(t) = s'(t)}$

La ***aceleración del objeto*** es: $\boldsymbol{a(t) = v'(t) = s''(t)}$

Ejemplo:

Un objeto viaja sobre una recta y su posición está dada por $s(t) = 7sen(t)$ donde $\boldsymbol{t}$ se mide en horas y $\boldsymbol{s}$ en kilómetros.

- Determinar en qué instante la velocidad del objeto es 2 km/h.
- Hallar la aceleración del objeto a las 2 horas.

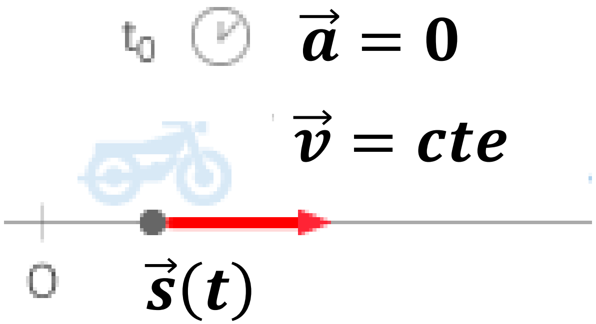
Posición – Velocidad - Aceleración

Veamos unos ejemplos
que estudiaron en física…

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Posición - Velocidad - Aceleración

MRU (Movimiento Rectilíneo Uniforme) → Velocidad constante



Pensemos cómo debería ser la función posición …

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= v_o = \text{cte} \\ s(t) &= v_o \cdot t + s_o \end{aligned}}$$

MRU

Posición – Velocidad - Aceleración

MRU (Movimiento Rectilíneo Uniforme) → Velocidad constante

Ejemplo:

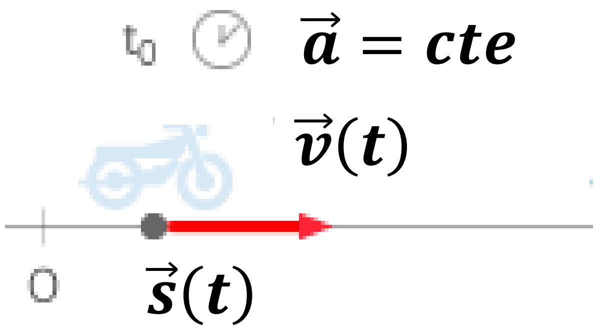
Un objeto se mueve en la dirección del eje x con velocidad constante e igual a $2\, m/seg$

- Determinar la expresión de la posición en función del tiempo.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Posición - Velocidad - Aceleración

MRUV (Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado) → Aceleración constante



Y ahora… ¿cómo debería ser la función posición?

$$a(t) = a_o = \text{cte}$$

$$v(t) = a_o \cdot t + v_o$$

$$s(t) = \frac{a_o}{2} \cdot t^2 + v_o \cdot t + s_o$$

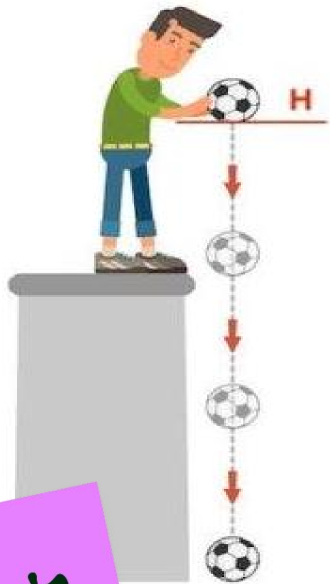
MRUV

Posición - Velocidad - Aceleración

MRUV (Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado) → Aceleración constante

Ejemplo (caída libre)

Una pelota se deja caer desde una cierta altura H. La aceleración del objeto es contante e igual a $g = 9{,}8\, m/seg^2$



- ¿Cuánto será la velocidad inicial?
- Determinar la expresión de la posición de la pelota en función del tiempo.

Ojo con cómo se elige el eje y el origen de coordenadas

Imagen de Clker-Free-Vector-Images en Pixabay

Posición – Velocidad - Aceleración

Ejemplo:

La posición de un objeto está dada por: $s(t) = -4{,}9t^2 + 0{,}5t + 1{,}5$, donde $\boldsymbol{t}$ se mide en segundos y $\boldsymbol{s}$ en metros.

- ¿Cuál es la velocidad del objeto en función del tiempo?
- ¿Cuánto es la velocidad del objeto a los 2 segundos?
- ¿En algún momento el objeto está en reposo?
- Determinar en qué instante la velocidad del objeto es 4 m/seg.
- ¿Cuál es la aceleración en función del tiempo?
- Hallar la aceleración del objeto a los 2 segundos.

Matemática

Clase 27 – Martes 10 -10

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

Clase	Semana	Tema de la Semana	Práctica
24	18-sep	Tema 12: Derivada	Trabajo Práctico N°10: Derivadas
25	25-sep	Tema 12: Derivada	Trabajo Práctico N°10: Derivadas
26	2-oct	Tema 13: Aplicaciones de la derivada	Trabajo Práctico N°11: Estudio del crecimiento y concavidad de funciones
27	9-oct	Tema 13: Aplicaciones de la derivada	Trabajo Práctico N°11: Estudio del crecimiento y concavidad de funciones

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

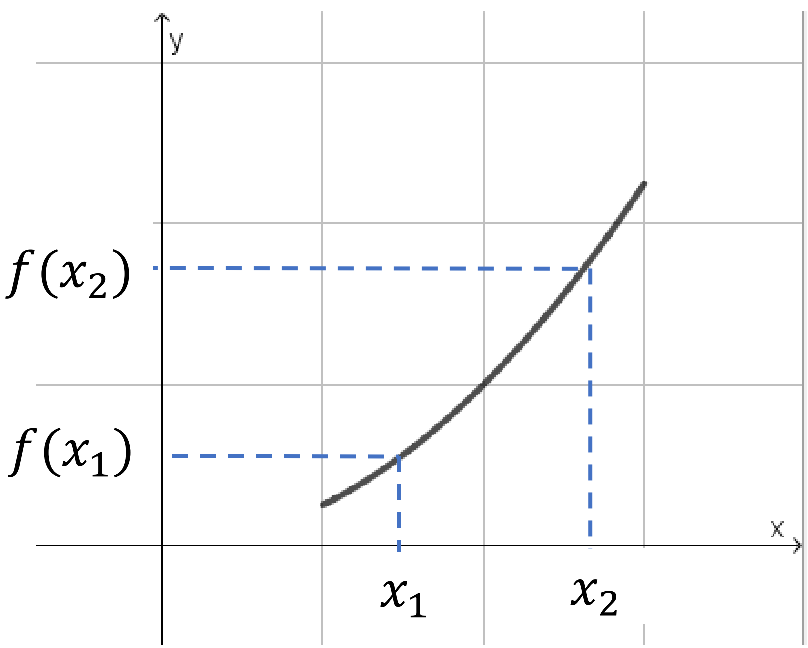
¡Ahora vamos a ver cómo la derivada nos da información sobre ciertas características de una función!

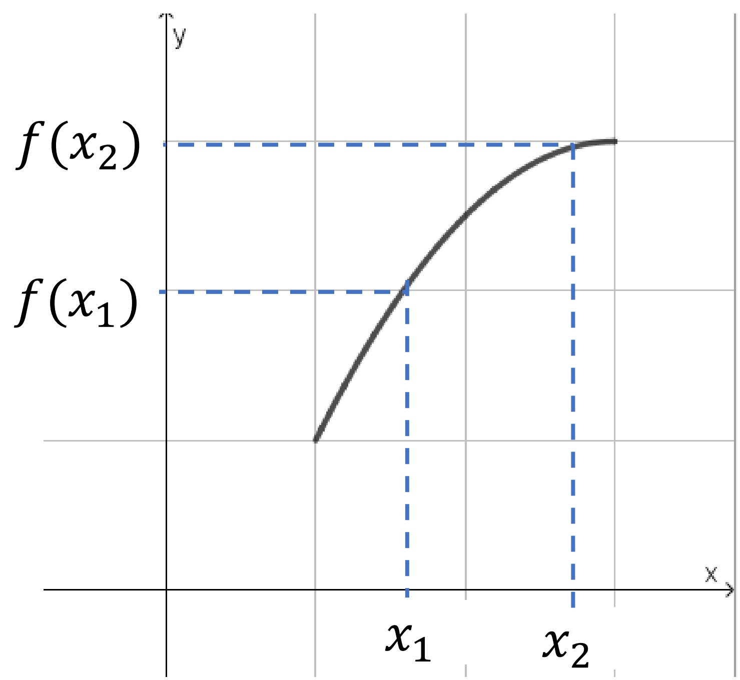
Función CRECIENTE

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I \subset Dom(f)$, x_1 y $x_2 \in I$

Función creciente: si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$

Gráficamente



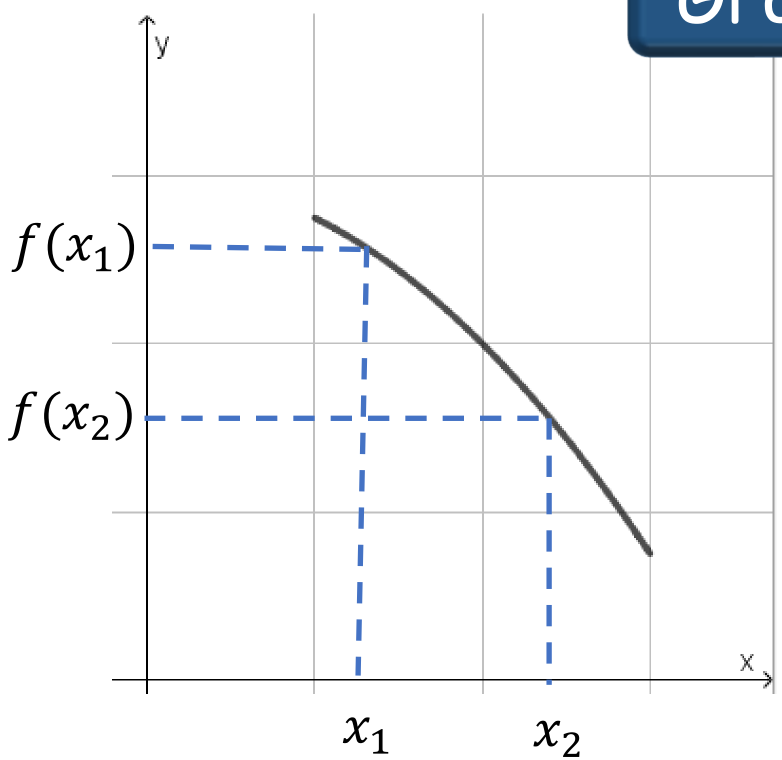


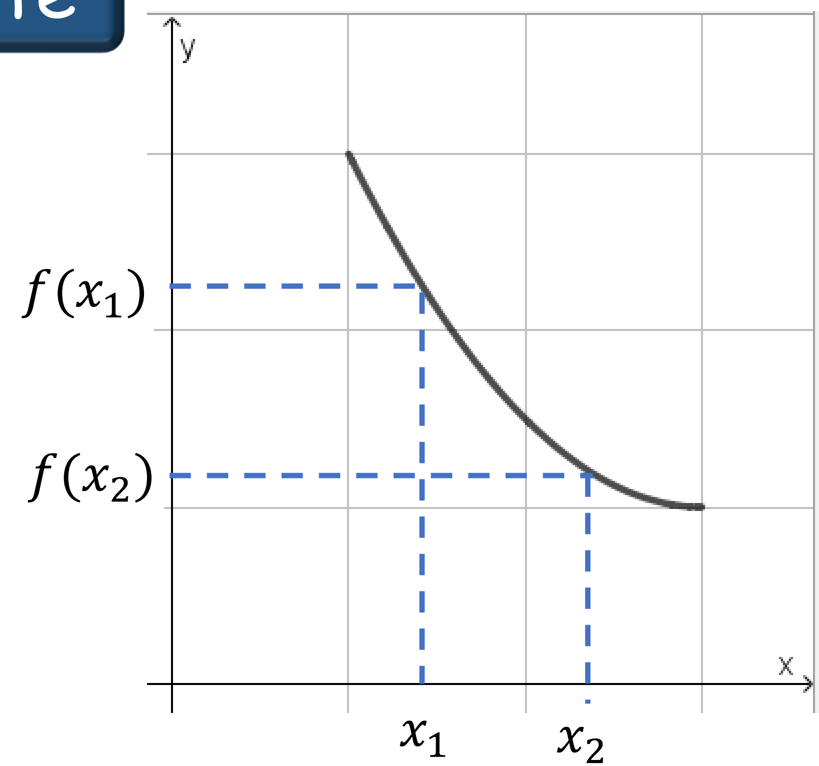
Función DECRECIENTE

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I \subset Dom(f)$, x_1 y $x_2 \in I$

Función decreciente: si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$

Gráficamente





Funciones CRECIENTES Y DECRECIENTES

Definición

Sea $f(x)$ una función y sea I un intervalo contenido en el dominio de f

- $f(x)$ **es creciente** en I si:

$$\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)} \text{ siempre que } \boldsymbol{x_1 < x_2}$$

$$\text{(para cualquier } \boldsymbol{x_1} \text{ } \boldsymbol{y} \text{ } \boldsymbol{x_2} \text{ en } I\text{)}$$

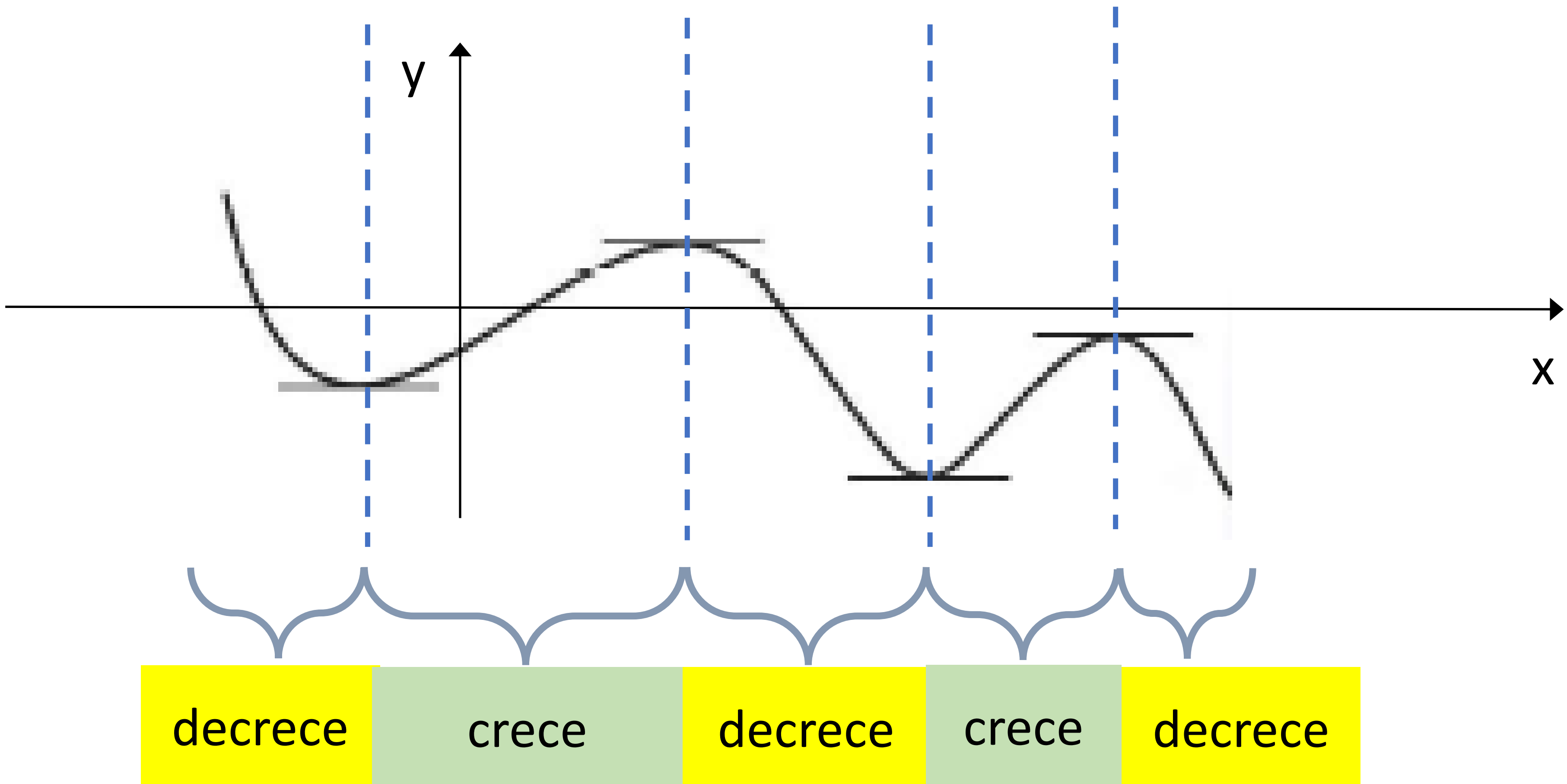
- $f(x)$ **es decreciente** en I si:

$$\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)} \text{ siempre que } \boldsymbol{x_1 < x_2}$$

$$\text{(para cualquier } \boldsymbol{x_1} \boldsymbol{y} \text{ } \boldsymbol{x_2} \text{ en } I\text{)}$$

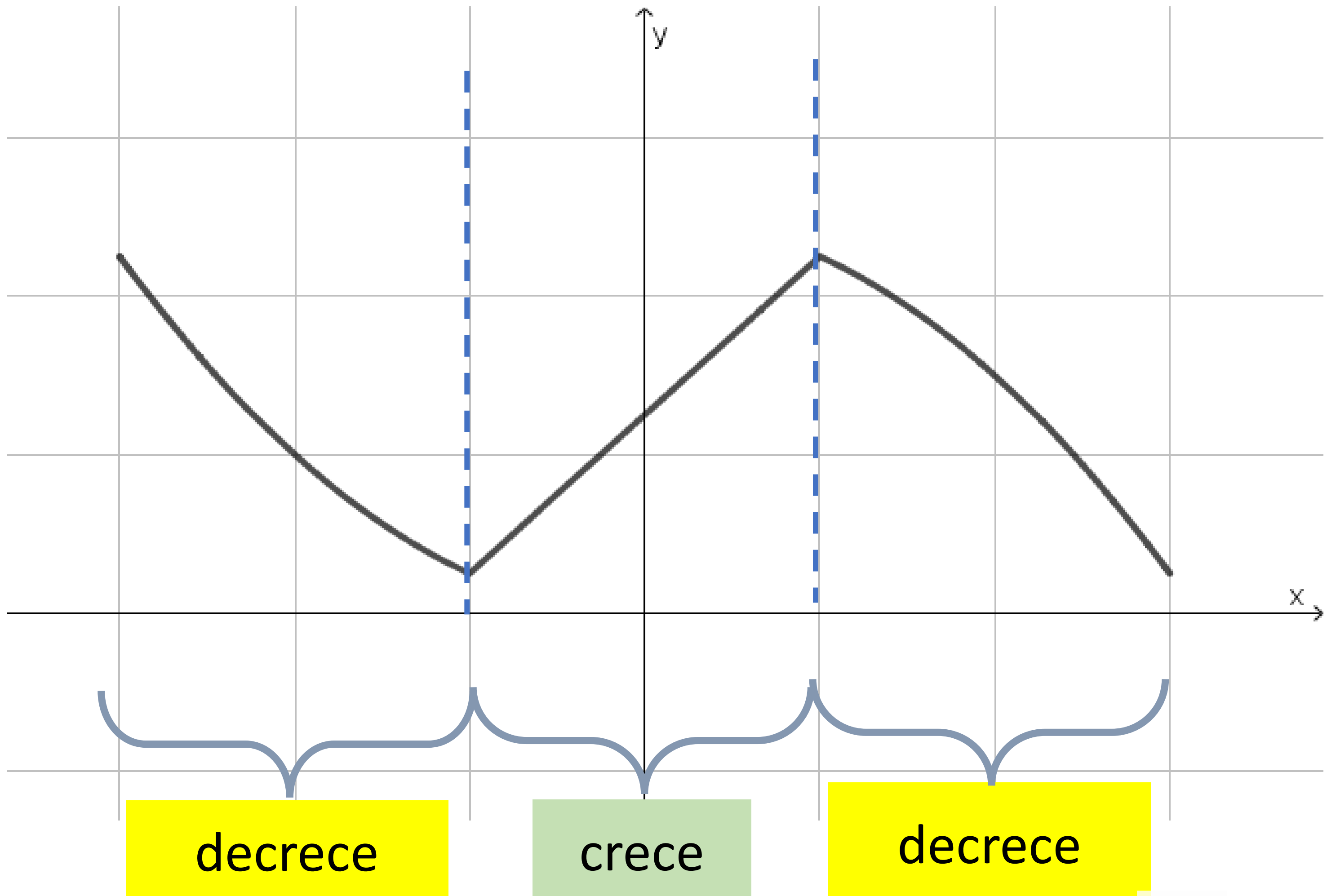
Funciones CRECIENTES Y DECRECIENTES

Gráficamente



Funciones CRECIENTES Y DECRECIENTES

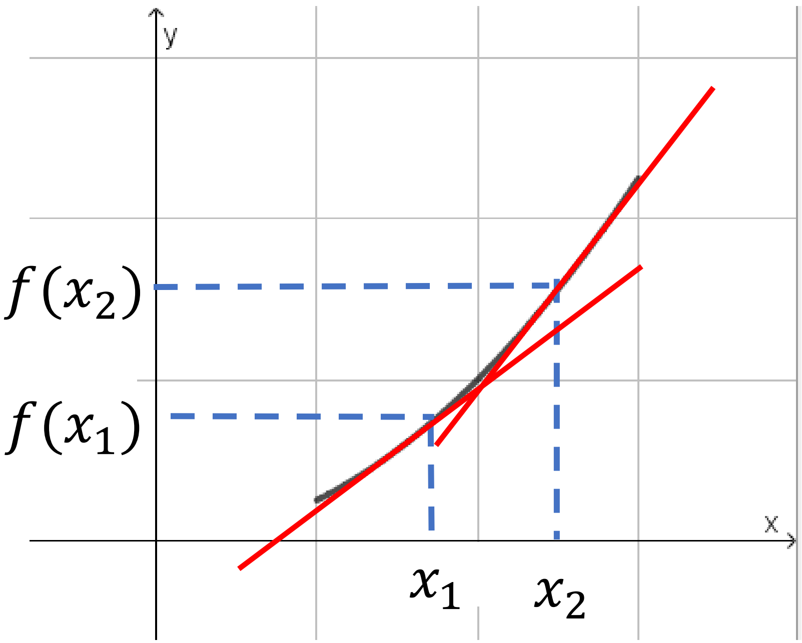
Gráficamente

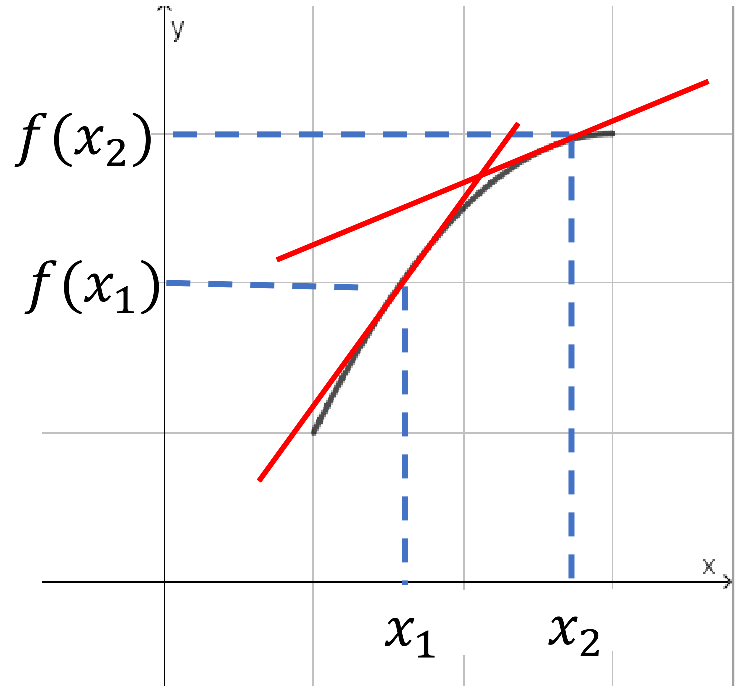


FCAyF Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Funciones CRECIENTES Y DECRECIENTES

¿Cómo vamos a determinar si una función es creciente en forma analítica?

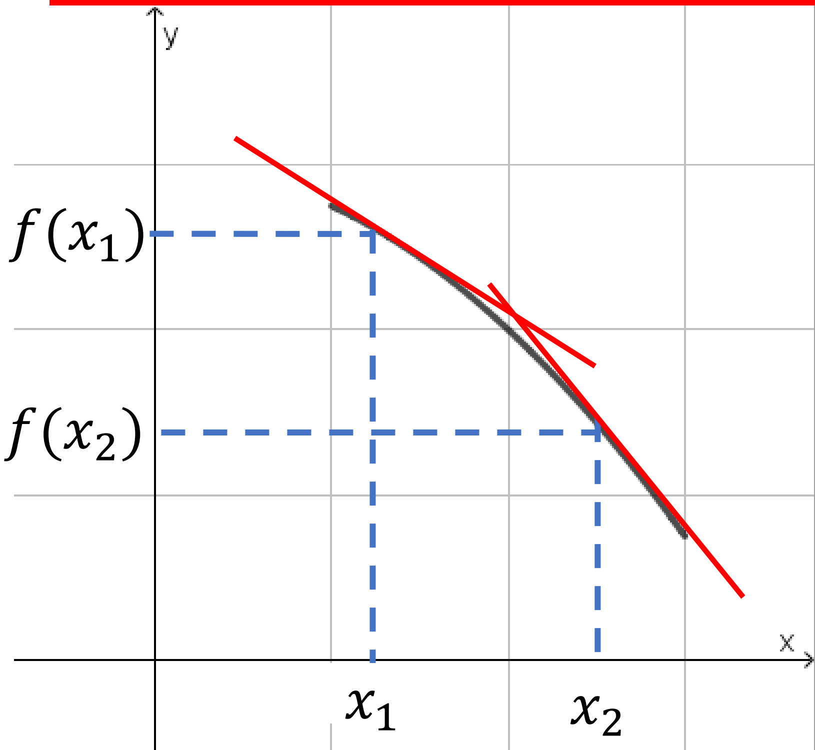


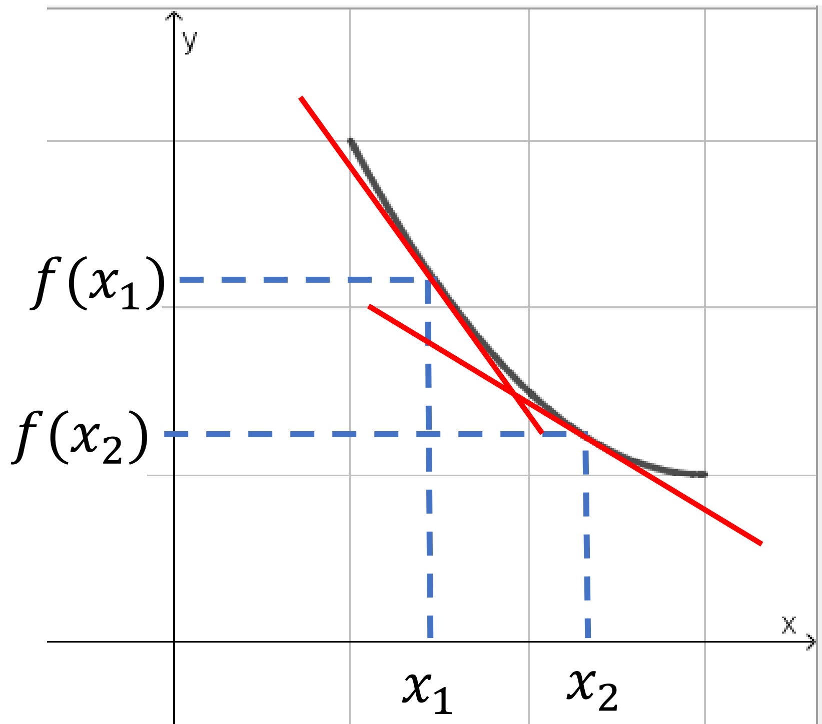


Las **pendientes** de las **rectas tangentes** son **positivas**, entonces la **derivada es positiva**, entonces la **función es creciente.**

Funciones CRECIENTES Y DECRECIENTES

¿Cómo vamos a determinar si una función es decreciente en forma analítica?





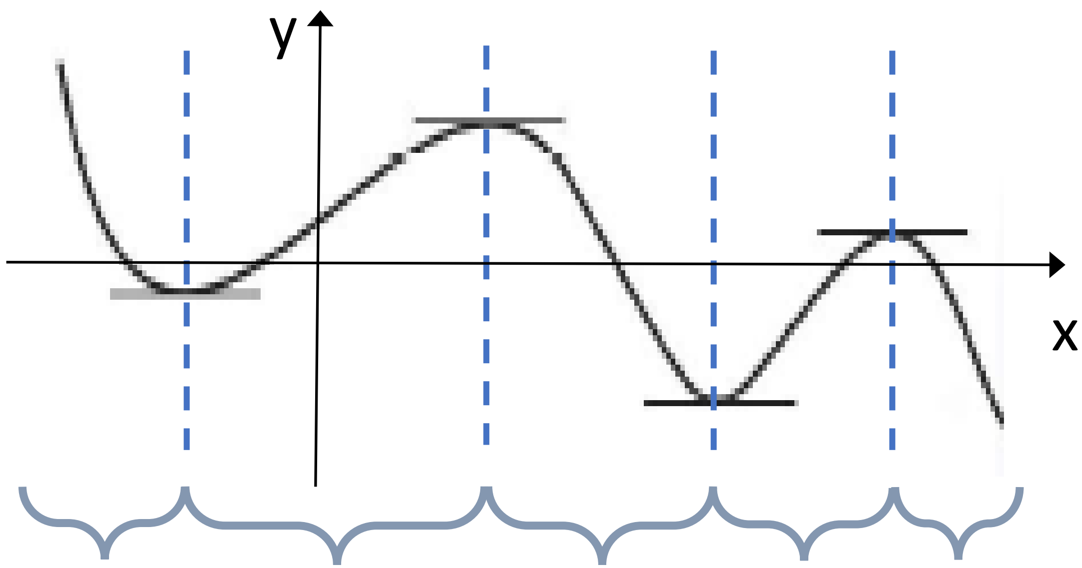
Las **pendientes** de las **rectas tangentes son negativas**, entonces la **derivada es negativa**, entonces **f es decreciente**

Funciones CRECIENTES Y DECRECIENTES

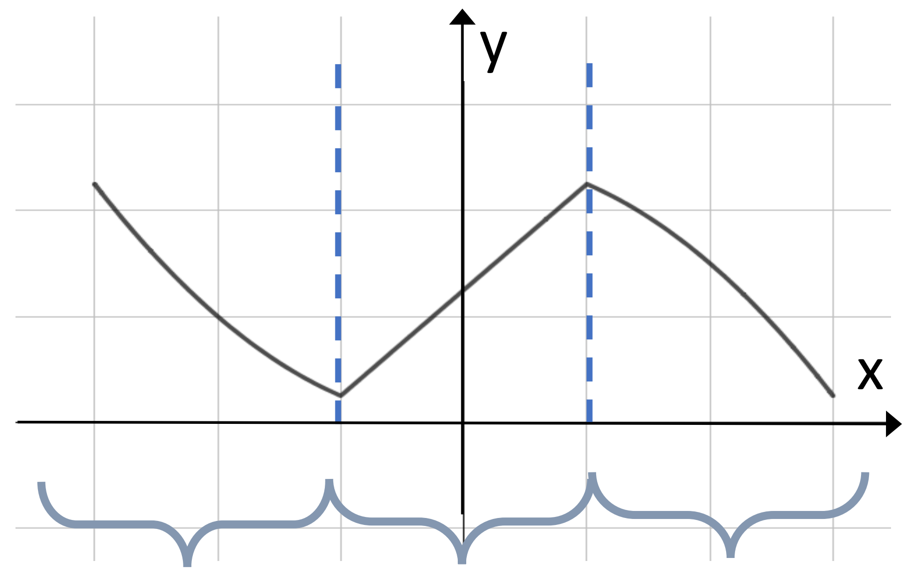
Teorema

Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces:

- Si $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ en (a,b) entonces $f(x)$ **es creciente** en (a,b) .
- Si $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ en (a,b) entonces $f(x)$ **es decreciente** en (a,b) .



decrece | crece | decrece | crece | decrece



decrece | crece | decrece

Funciones CRECIENTES Y DECRECIENTES

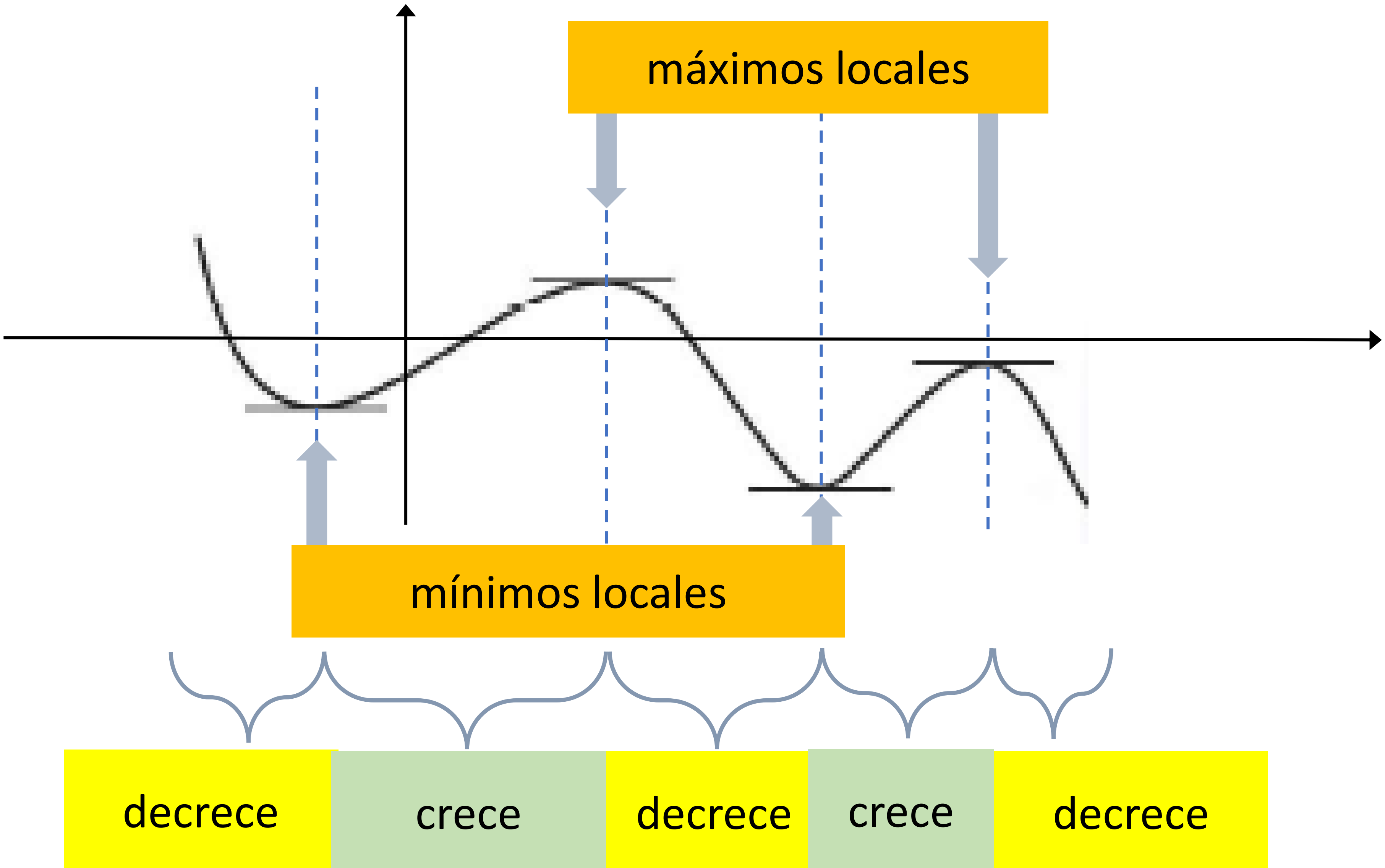
Ejemplo 1:

- ✓ Determinar dónde la función $g(x)$ es creciente y dónde decreciente de manera analítica.
- ✓ Graficar en GeoGebra y comparar.

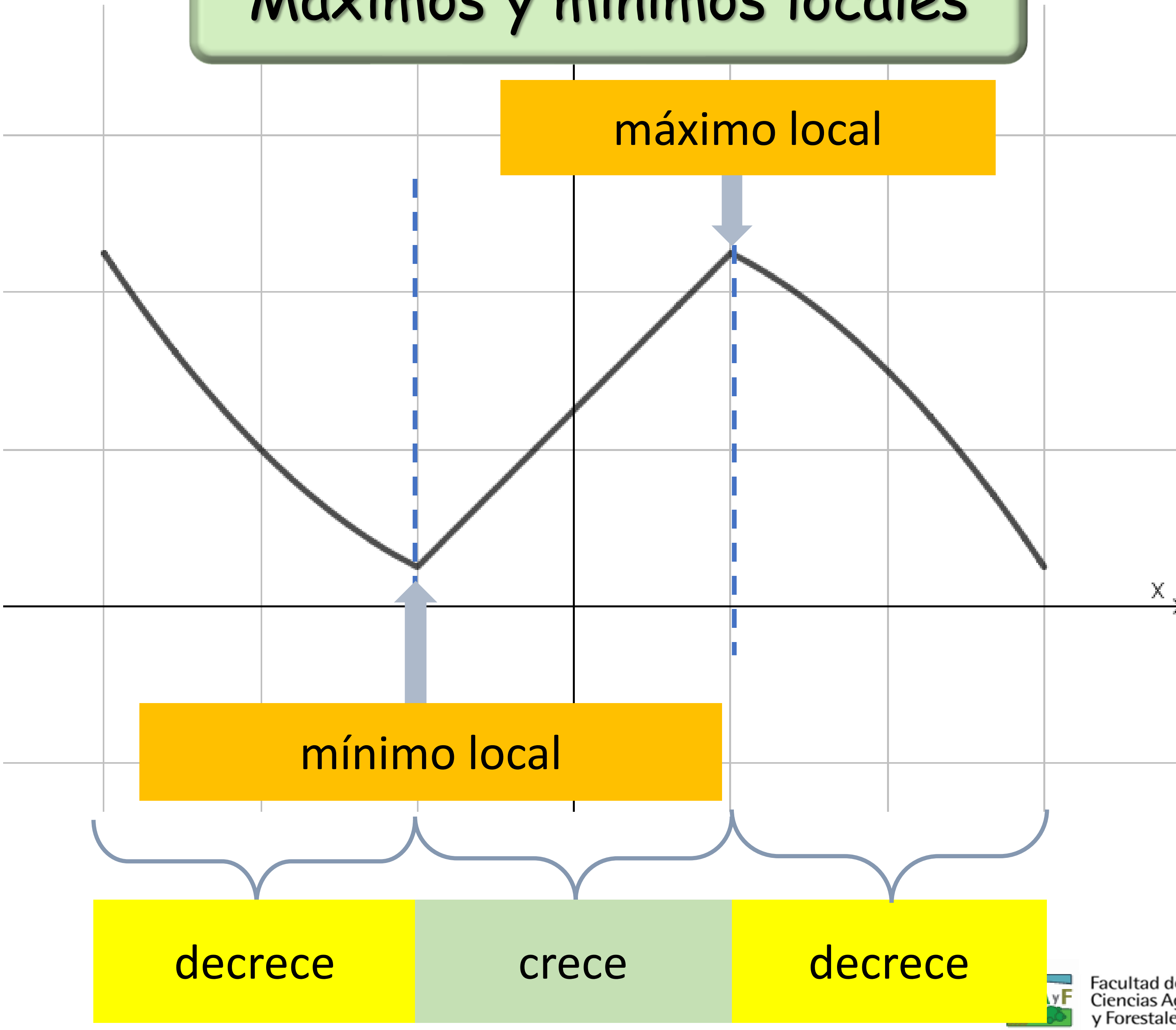
$$g(x) = x^3 + x^2 - x - 2$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Máximos y mínimos locales



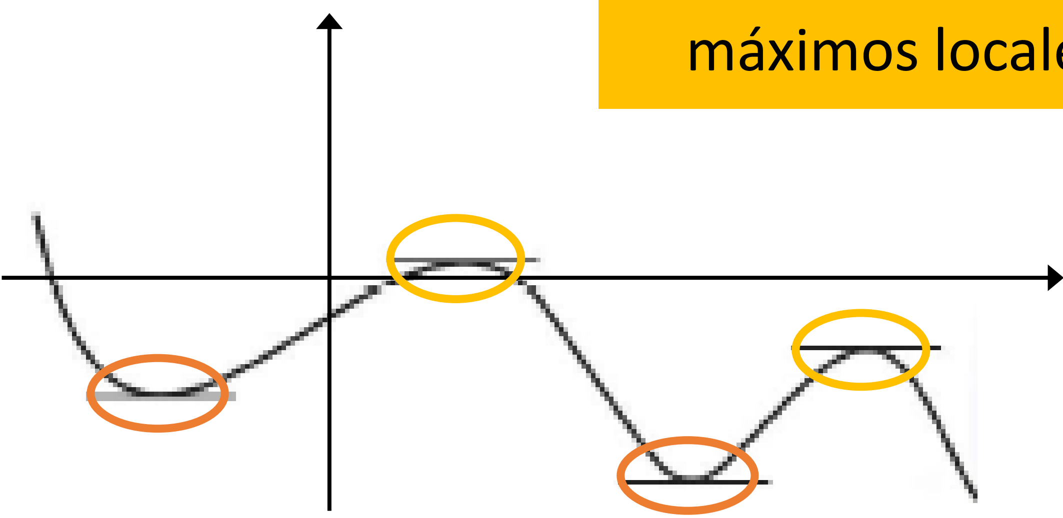
Máximos y mínimos locales



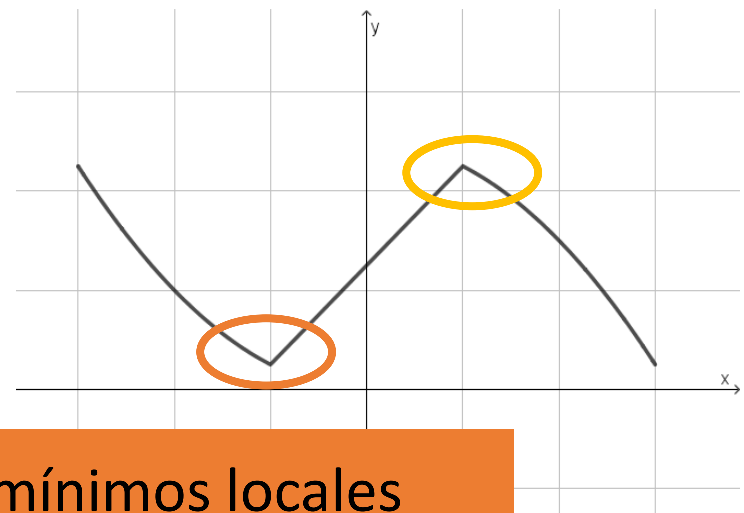
Extremos locales

Sea ***c* un número en el dominio** de la función $f(x)$:

- $f(x)$ tiene un máximo local en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo $\forall x$ cercano a c.
- $f(x)$ tiene un mínimo local en c si $f(c) \leq f(x)$ para todo $\forall x$ cercano a c.
- En cualquiera de los dos casos decimos que $f(x)$ tiene un extremo local en c .



máximos locales



mínimos locales

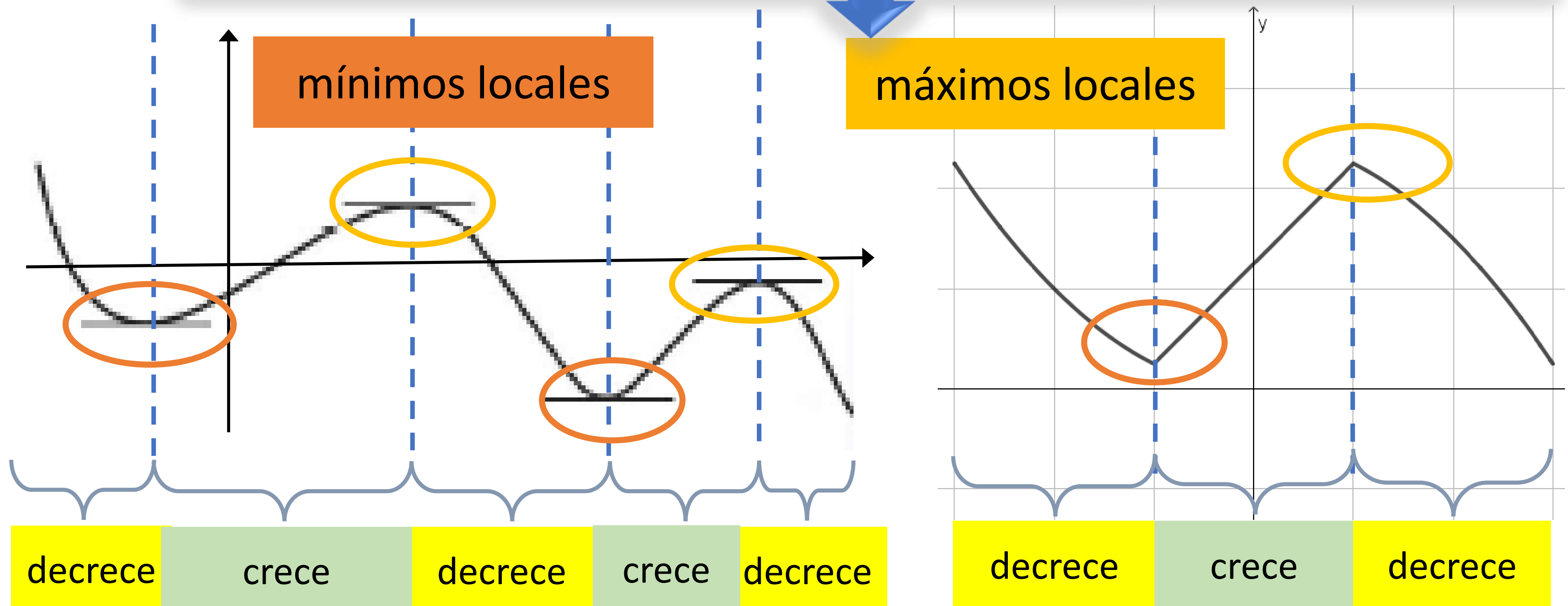
Extremos locales

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Miremos fuerte …

¿Cómo podemos determinar los extremos locales de una función?

Las funciones pasan de ser crecientes a decreciente, o al revés.



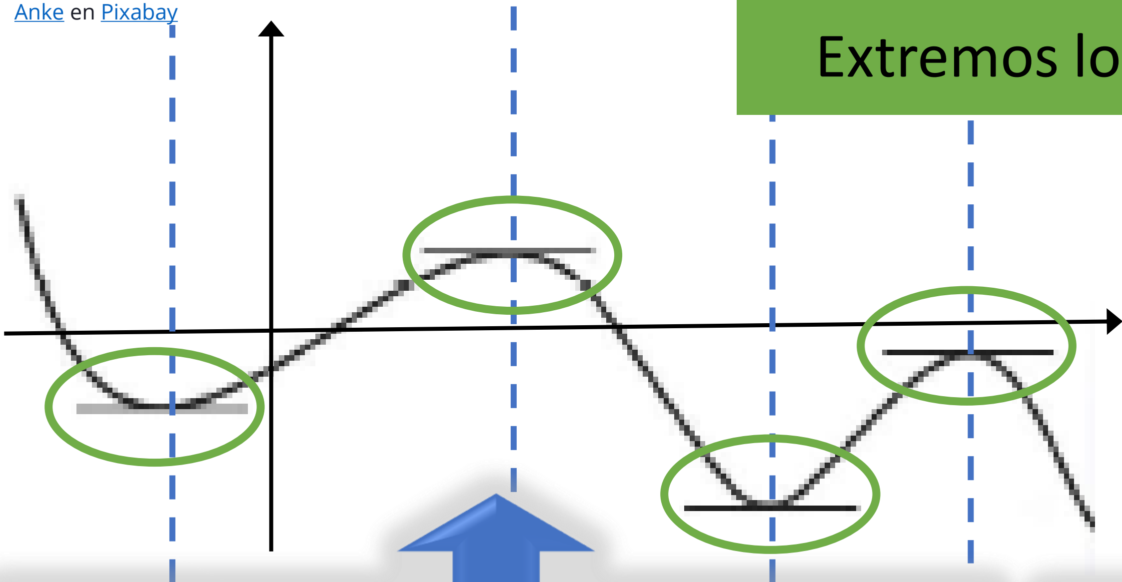
Extremos locales

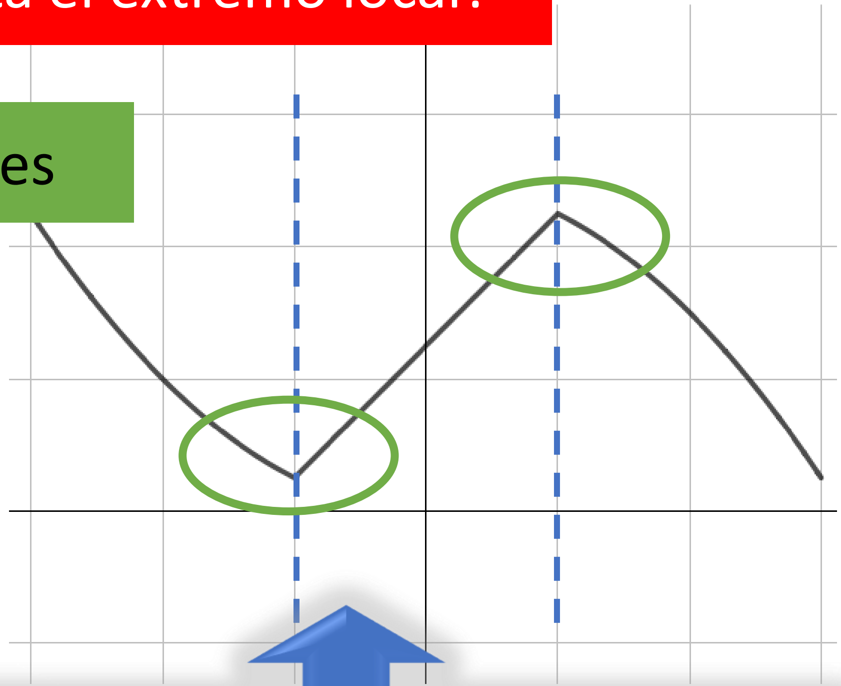
Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Miremos fuerte …

Y ¿qué pasa en el pundo donde está el extremo local?

Extremos locales





En los puntos de la gráfica donde hay un extremo local, la recta tangente es horizontal.

En los puntos de la gráfica donde hay un extremo local no hay recta tangente porque la función no es derivable.

Puntos críticos

Un **punto crítico** de una función $f(x)$ es un número c perteneciente al dominio que verifica alguna de estas dos cosas:

- Si $f(x)$ es derivable en c, entonces $\boldsymbol{f'(c) = 0}$.
- $f(x)$ no es derivable en c.

Lo vemos…

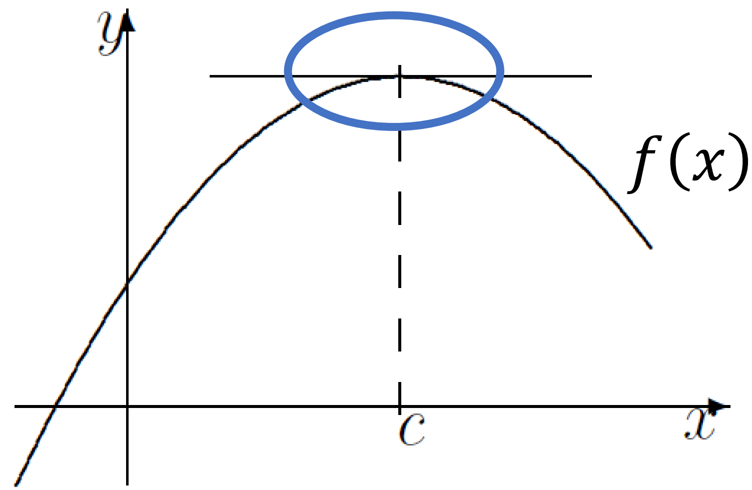
Puntos críticos

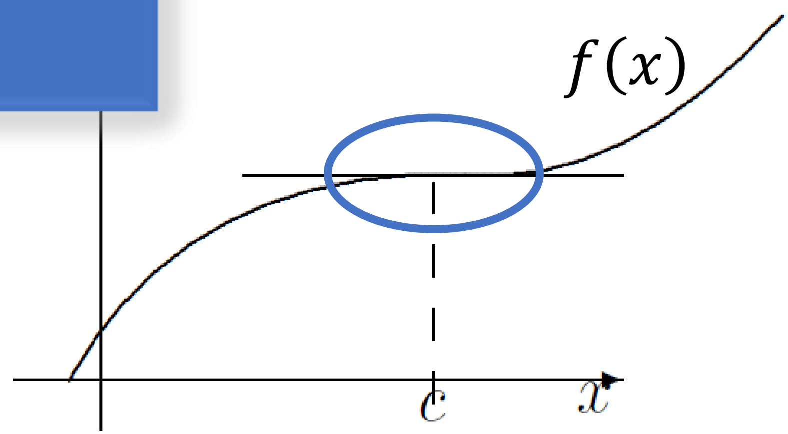
Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

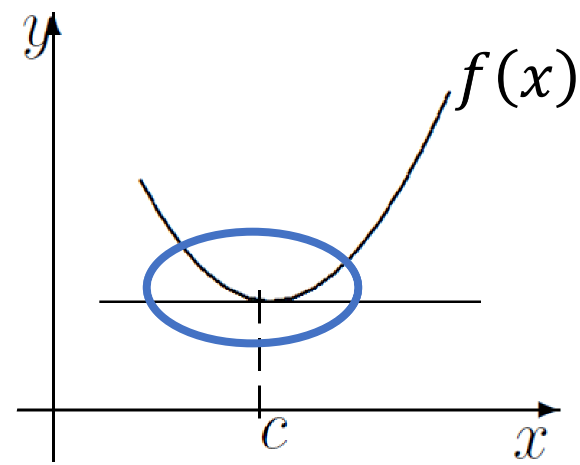
¿Cómo se verá un punto crítico en la gráfica de una función?...

Son puntos críticos de $f(x)$ porque:

- ✓ **pertenecen al dominio**
- ✓ **y $f'(c) = 0$**







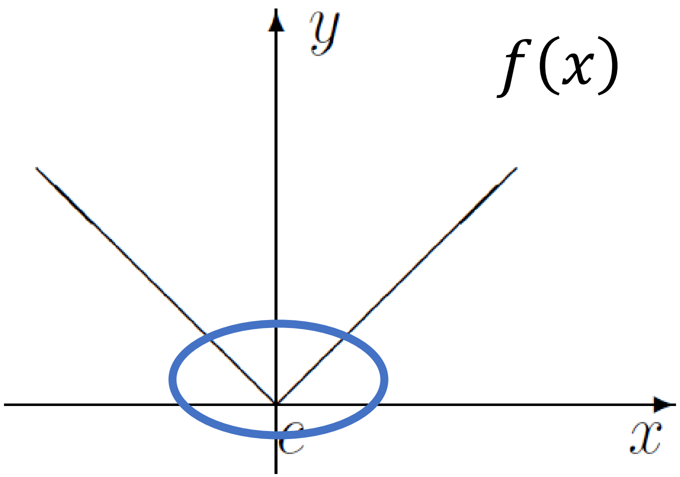
Puntos críticos

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿Cómo se verá un punto crítico en la gráfica de una función?...

Es un punto crítico de $f(x)$ porque:

- **pertenece al dominio**
- **y $f(x)$ no es derivable en c**



Puntos críticos

PROPIEDAD

Si una función continua $f(x)$ alcanza un extremo local en c entonces $\boldsymbol{c}$ **es un punto crítico** de f.

Pensemos … ¿qué significa esta propiedad?...

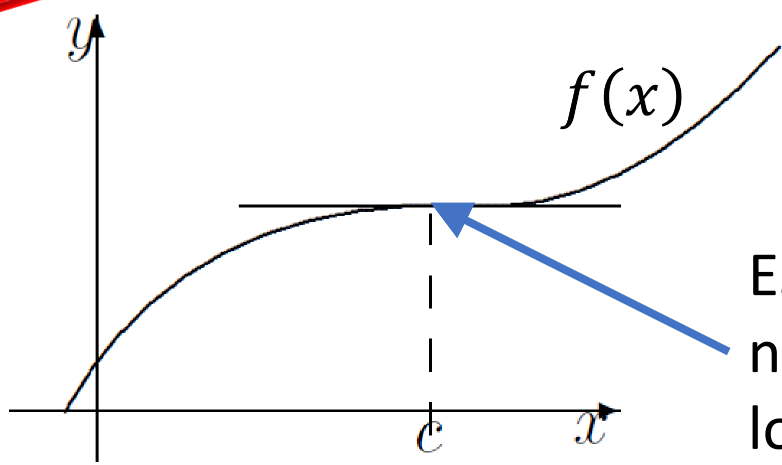
Si $f(x)$ (continua) tiene extremos locales → **Necesariamente están en puntos críticos**

Puntos críticos

PROPIEDAD

Si una función continua $f(x)$ alcanza un extremo local en c entonces $\boldsymbol{c}$ **es un punto crítico** de f.

Los puntos críticos NO necesariamente son extremos



Es un PC pero no un extremo local

Puntos críticos y Extremos locales

Ejemplo 2:

- ✓ Determinar los extremos locales, si los tiene, de la función $g(x)$.
- ✓ Graficar en GeoGebra y verificar.

$$g(x) = x^3 + x^2 - x - 2$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Puntos críticos y Extremos locales

Ejemplo 3:

- ✓ Determinar los extremos locales, si los tiene, de la función $g(x)$.
- ✓ Graficar en GeoGebra y verificar.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Matemática

Clase 28 – Martes 17 -10

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

Clase	Semana	Tema de la Semana	Práctica
28	16-oct	Tema 13: Aplicaciones de la derivada	Trabajo Práctico N°10: Estudio del crecimiento y concavidad de funciones
29	23-oct	Tema 14: Integrales	Trabajo Práctico N°11: Integrales
30	30-oct	Tema 14: Integrales	Trabajo Práctico N°11: Integrales
31	6-nov	Semana de Repaso	

Aplicaciones de la derivada

La clase pasada vimos cómo encontrar los intervalos de crecimiento de una función y sus extremos relativos, si tiene.

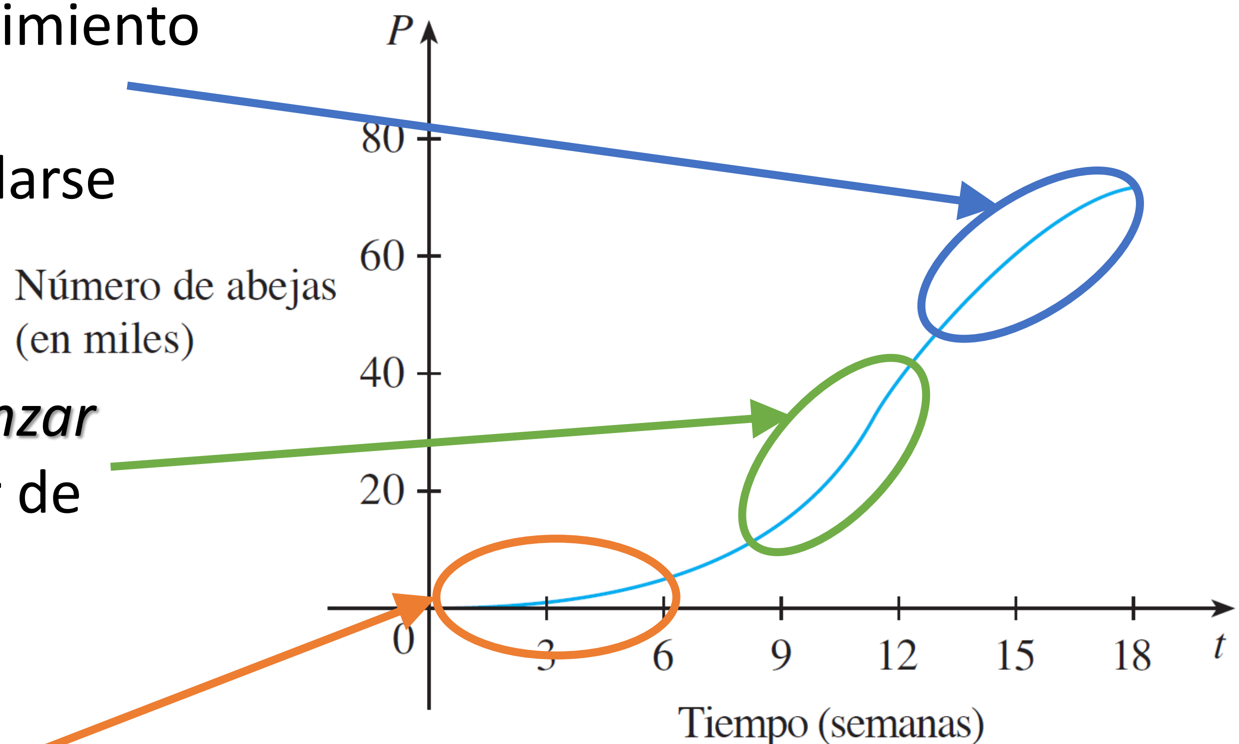
Veamos qué más podemos conocer de una función a partir de sus derivadas.

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Aplicaciones de la derivada

El gráfico muestra la población de abejas de Chipre criadas en un colmenar. ***¿Cómo cambia la tasa de crecimiento de la población con el tiempo? ¿cuándo esta tasa es más alta?***

Finalmente, la tasa de crecimiento disminuye a medida que la población comienza a nivelarse



Luego aumenta hasta ***alcanzar su valor máximo*** alrededor de las 12 semanas

Al principio la tasa de crecimiento es muy pequeña

Aplicaciones de la derivada

Pareciera ser de interés encontrar ese punto en el que la tasa de crecimiento alcanza su valor máximo

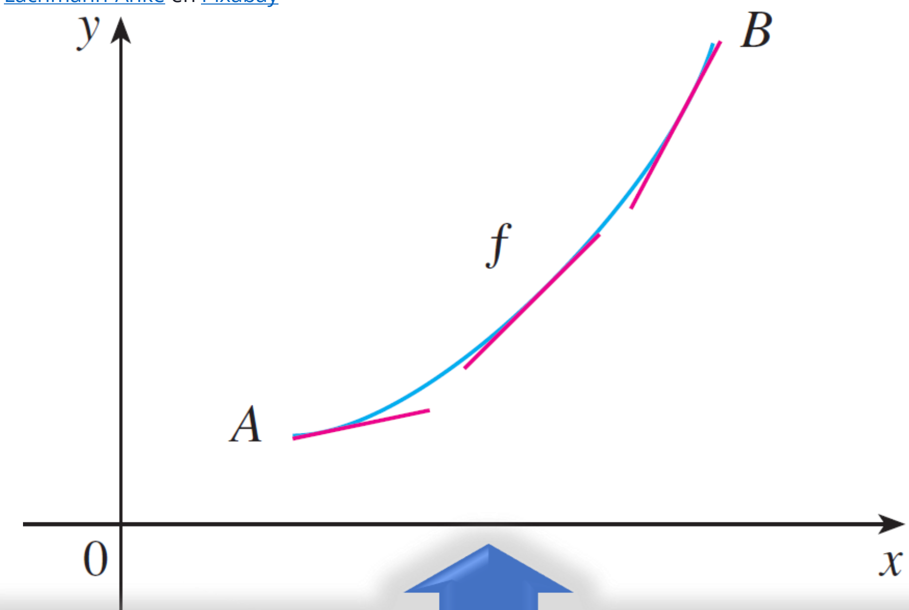
A partir de ese punto, la población sigue creciendo, pero la tasa (velocidad) a la que crece empieza a ser cada vez menor

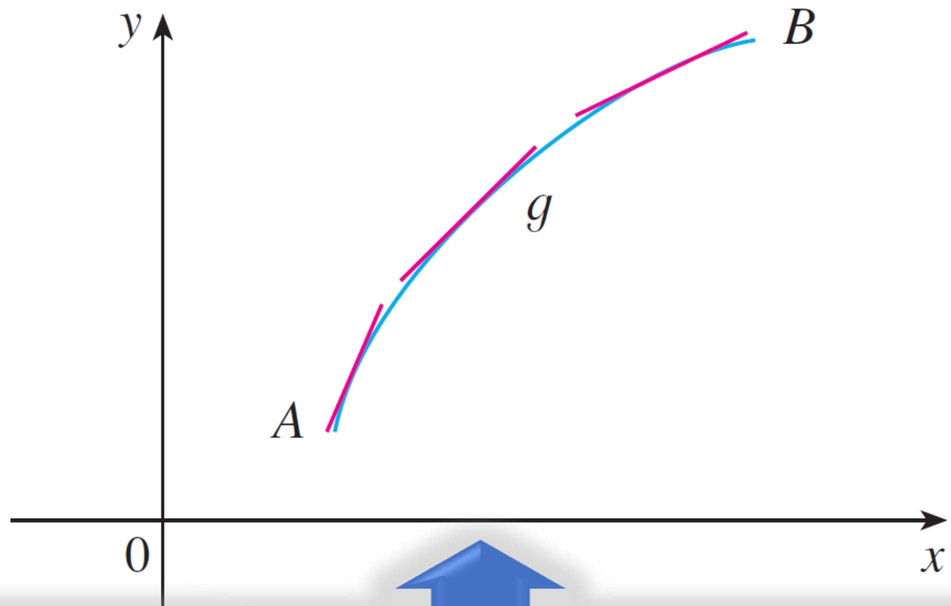
CONCAVIDAD

Imagen de [Peggy und Marco Lachmann-Anke](#) en [Pixabay](#)

Veamos cómo sería…

f y g son dos funciones crecientes en (a, b), pero lucen distintas…





La curva queda por encima de las rectas tangentes.

Cóncava hacia arriba

La curva queda por debajo de las rectas tangentes.

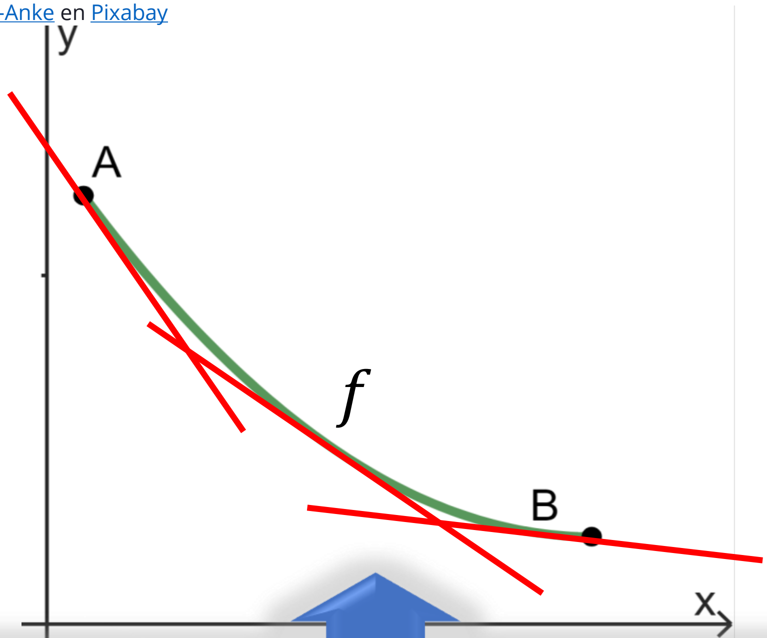
Cóncava hacia abajo

CONCAVIDAD

Imagen de [Peggy und Marco Lachmann-Anke](#) en [Pixabay](#)

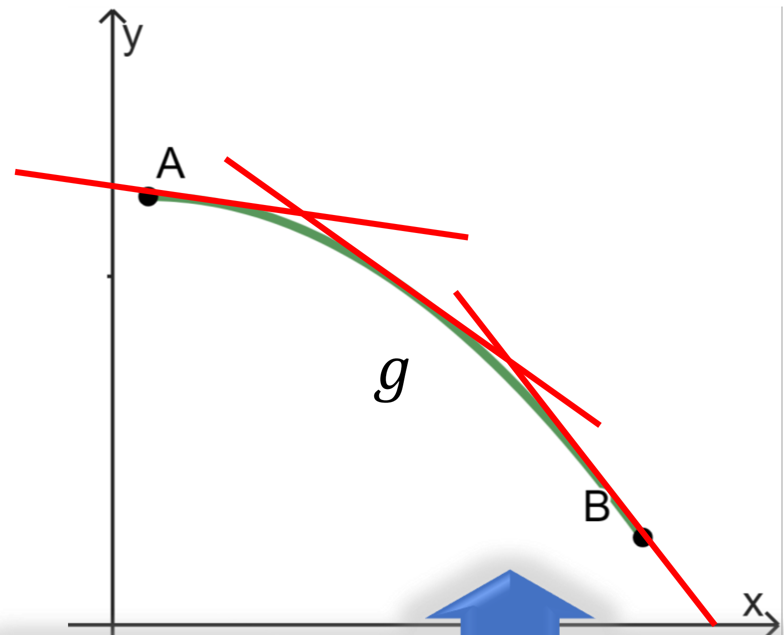
Lo mismo sucede con funciones decrecientes…

f y g son dos funciones decrecientes en (a, b) y lucen distintas…



La curva queda por encima de las rectas tangentes.

Cóncava hacia arriba



La curva queda por debajo de las rectas tangentes.

Cóncava hacia abajo

CONCAVIDAD

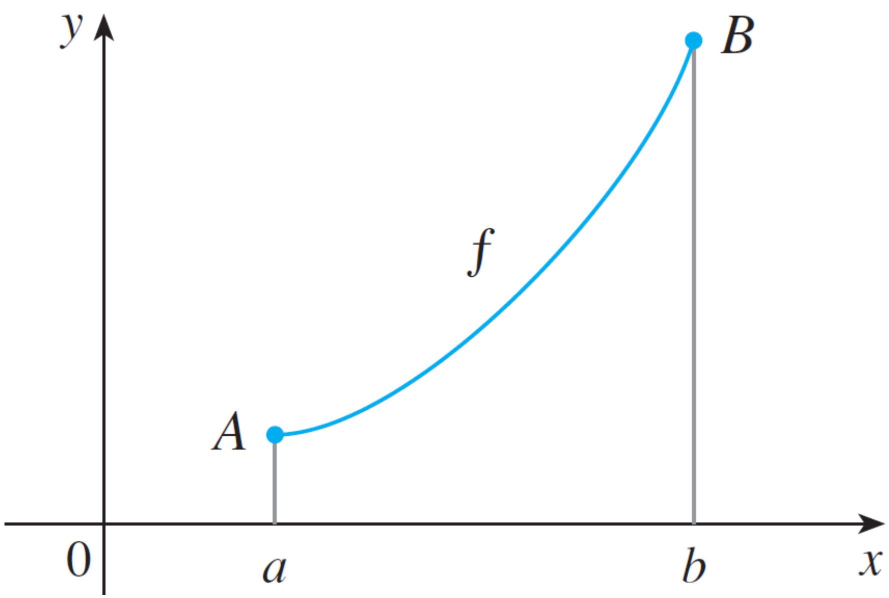
Definición

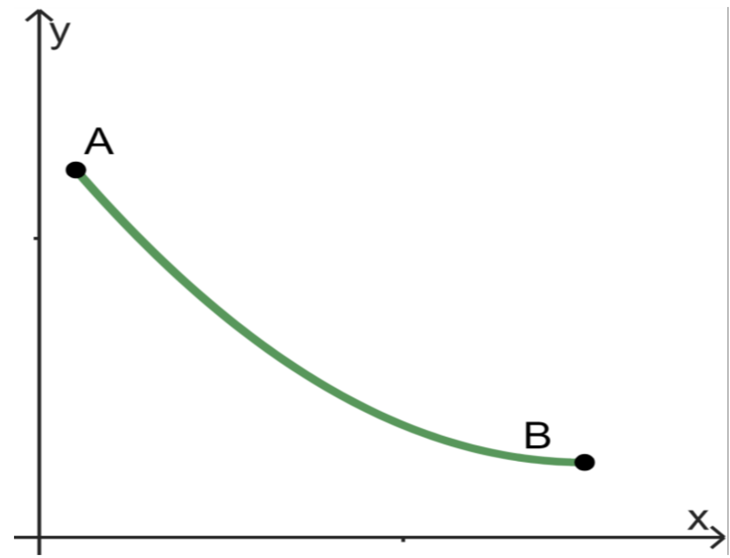
Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo I,

- Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus rectas tangentes en I, entonces f es **cóncava hacia arriba** en I.
- Si la gráfica de f queda por debajo de todas sus rectas tangentes en I, entonces f es **cóncava hacia abajo** en I.

CONCAVIDAD

Cóncava hacia arriba



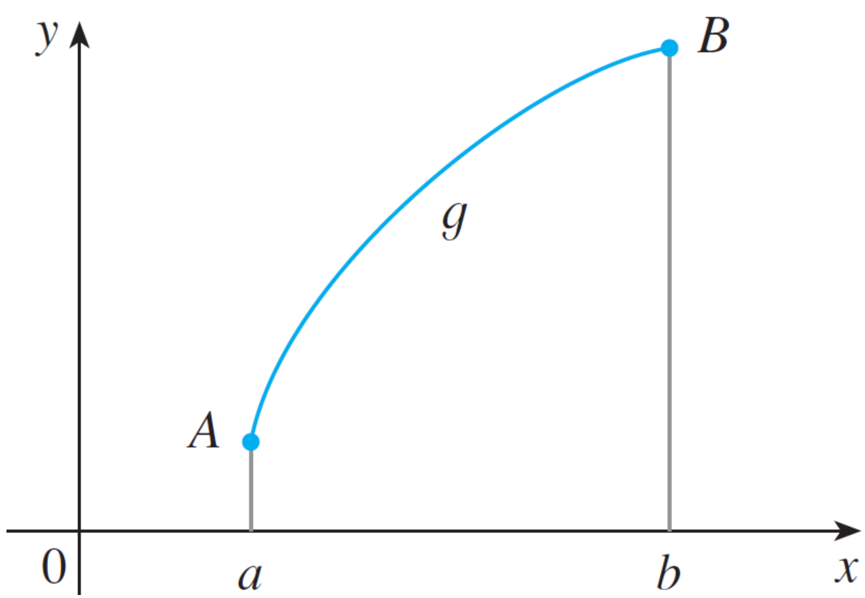


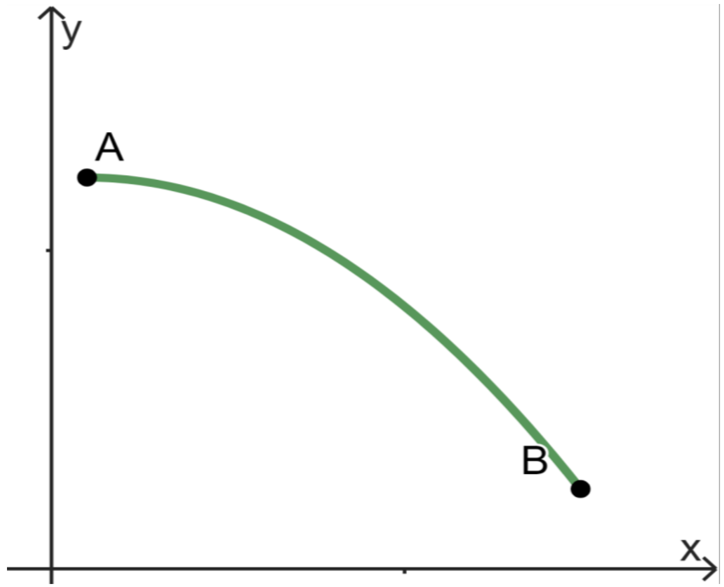
La pendiente de la recta tangente crece

La derivada segunda es positiva

CONCAVIDAD

Cóncava hacia abajo





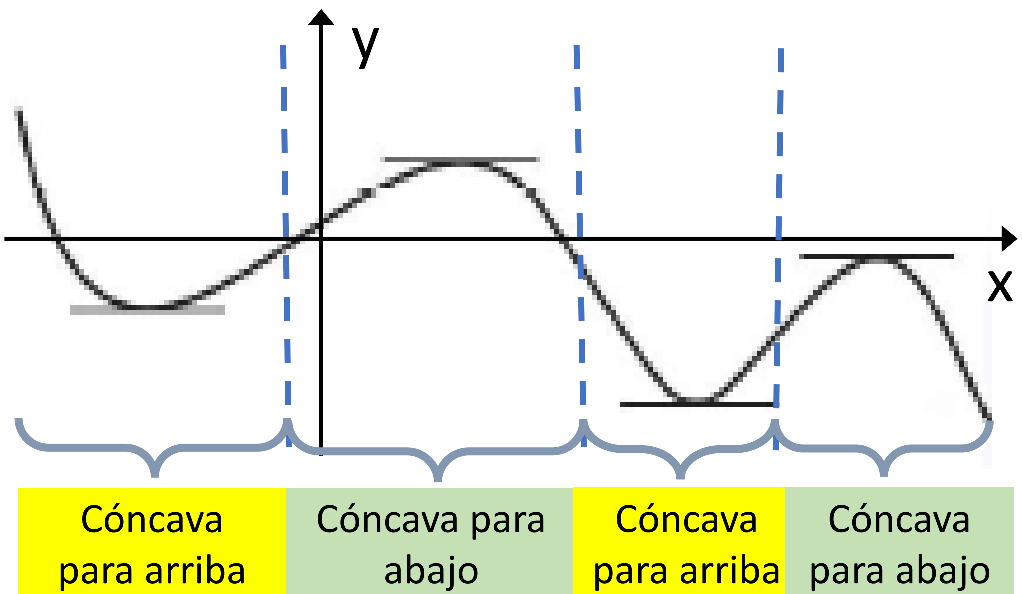
La pendiente de la recta tangente decrece

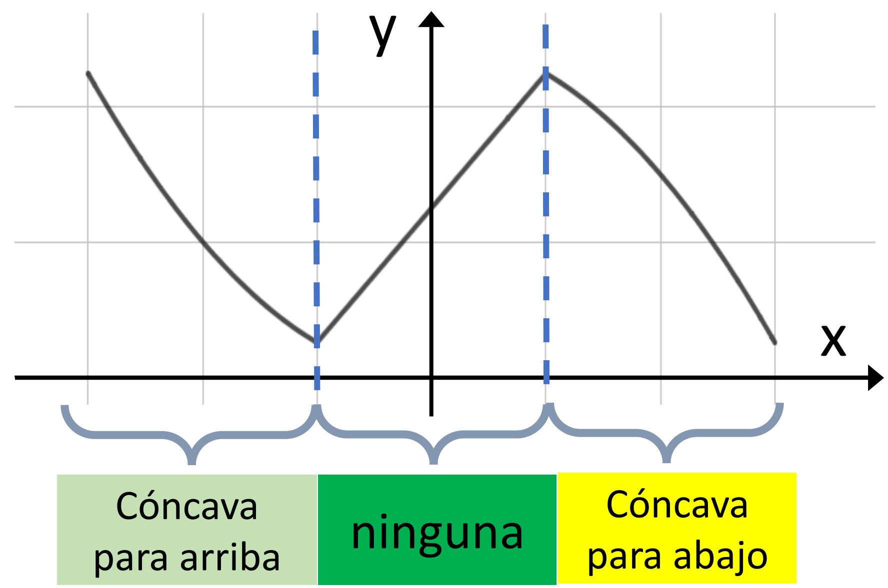
La derivada segunda es negativa

CONCAVIDAD

Propiedad

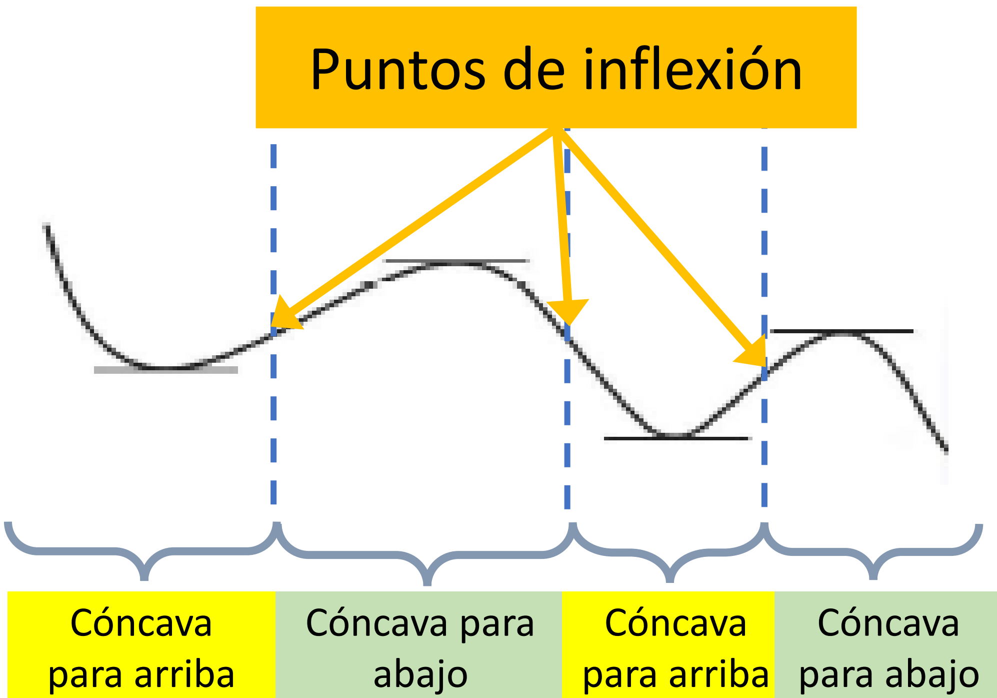
- Si para todo x en un intervalo I se tiene que $\boldsymbol{f''(x) > 0}$, entonces la gráfica de $f(x)$ **es cóncava hacia arriba** en I.
- Si para todo x en un intervalo I se tiene que $\boldsymbol{f''(x) < 0}$, entonces la gráfica de $f(x)$ **es cóncava hacia abajo** en I.

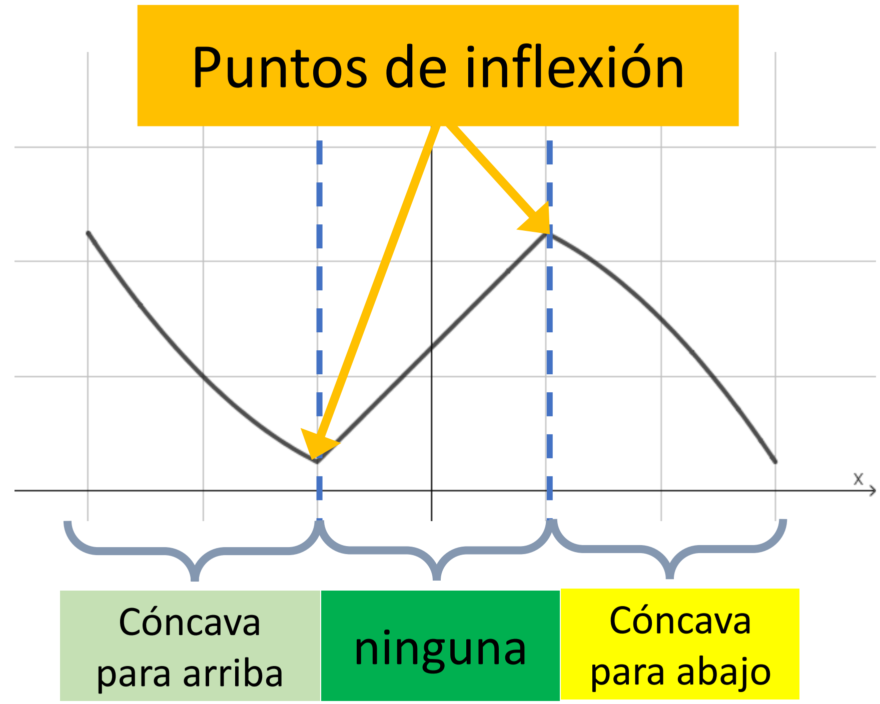




Punto de Inflexión

Un punto de continuidad de la gráfica de la función en el cual la concavidad cambia de sentido se llama **punto de inflexión.**





f es continua en todos los valores donde hay puntos de inflexión y $f''(x) = 0$, ¿POR QUÉ?

f es continua en todos los valores donde hay puntos de inflexión, pero en esos valores f'' no existe, ¿POR QUÉ?

Puntos de inflexión y concavidad

Ejemplo 1:

- ✓ Determinar intervalos de concavidad de la función $g(x)$ y los puntos de inflexión, si tiene, de manera analítica.
- ✓ Graficar en GeoGebra.

$$g(x) = x^3 + x^2 - x - 2$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Puntos de inflexión y concavidad

Ejemplo 2:

- ✓ Determinar intervalos de concavidad de la función $f(x)$ y los puntos de inflexión, si tiene, de manera analítica.
- ✓ Graficar en GeoGebra.

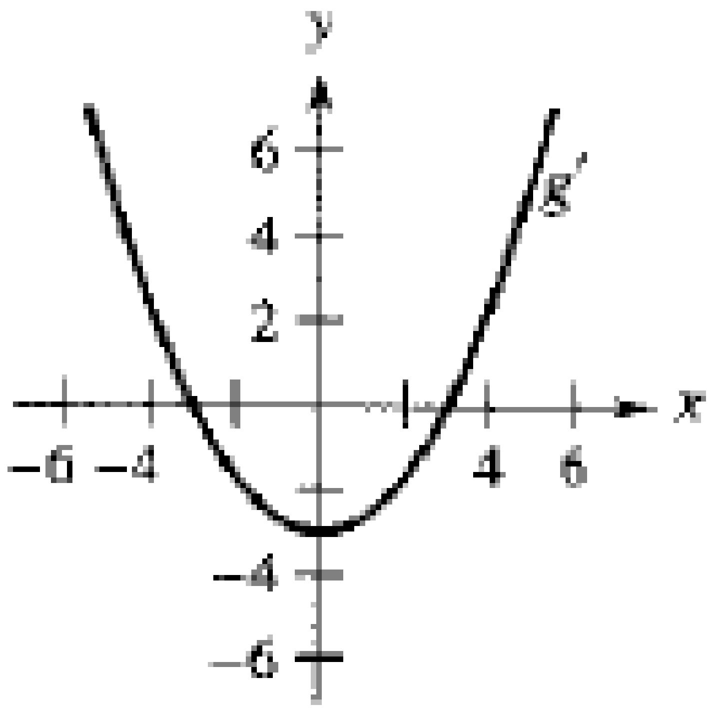
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Puntos de inflexión y concavidad

¿Y este ejercicio cómo sería?

Si la de abajo es la gráfica de la derivada de g, es decir, g'.
Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de g, los extremos locales si tiene, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión si tiene.
Luego, proponga un gráfico de g.



Análisis completo de una función

TODO JUNTO!!!

Análisis y gráfica de una función

- Dominio.
- Continuidad.
- Primera derivada.
- Puntos críticos.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Máximos y mínimos locales.
- Segunda derivada.
- Intervalos de concavidad.
- Puntos de inflexión.
- Comportamiento de la función en el infinito y menos infinito (o lo que corresponda de acuerdo al dominio de la función)
- Gráfica de la función.

Análisis completo de una función

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$g(x) = x^3 + x^2 - x - 2$$

- Dom g = R = $(-\infty, \infty)$
- Continuidad: la función es continua en todo su dominio por ser una función polinómica
- Comportamiento en el infinito:

$$\lim_{x\to-\infty} \overset{\to -\infty}{x^3} + \overset{\to \infty}{x^2} - x - 2 = \lim_{x\to-\infty} \overset{\to -\infty}{x^3}\Big(\underset{1}{\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}} + \underset{x}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}}} - \underset{x^2}{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x^3}}} - \frac{2}{x^3}\Big) = \lim_{x\to-\infty} x^3\Big(\overset{\to 1}{1 + \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} - \overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}} - \overset{\to 0}{\frac{2}{x^3}}}\Big) = -\infty$$

indeterminado

$$\lim_{x\to\infty} \overset{\to \infty}{x^3} + \overset{\to \infty}{x^2} \overset{\to -\infty}{- x} - 2 = \lim_{x\to\infty} \overset{\to \infty}{x^3}\Big(\underset{1}{\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}} + \underset{x}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}}} - \underset{x^2}{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x^3}}} - \frac{2}{x^3}\Big) = \lim_{x\to\infty} x^3\Big(\overset{\to 1}{1 + \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} - \overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}} - \overset{\to 0}{\frac{2}{x^3}}}\Big) = \infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales.

Análisis completo de una función

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$g(x) = x^3 + x^2 - x - 2$$

- Dom g = R = $(-\infty, \infty)$
- $g'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

Dom g' = R = $(-\infty, \infty)$

g' es continua en todo su dominio por ser una función polinómica

¿ $g'(x) = 0$?   ¿$3x^2 + 2x - 1 = 0$? $x = -1$ y $x = 1/3$ Puntos críticos

g' es continua y no se anula en $(-\infty, -1) \cup (-1, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$

Entonces g' mantiene el signo en esos intervalos

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, \infty)$
VP	-2		0		1
$g'(VP)$	7		-1		4
Signo de g'	+		-		+
Crecimiento de g	crece	g(-1)=-1	decrece	g($\frac{1}{3}$)=-$\frac{59}{27}$	crece

máximo local   mínimo local   -$\frac{59}{27}$≈-2,18

Análisis completo de una función

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$g(x) = x^3 + x^2 - x - 2$$

- Dom g = R = $(-\infty, \infty)$ Dom g'' = R = $(-\infty, \infty)$
- $g''(x) = 6x + 2$ g'' es continua en todo su dominio por ser una función polinómica

¿ $g''(x) = 0$? ¿$6x + 2 = 0$? $x = -1/3$

g'' es continua y no se anula en $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$

Entonces g'' mantiene el signo en esos intervalos

	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, \infty)$
VP	-1		0
$g''(VP)$	-4		2
Signo de g''	-		+
Concavidad de g	∩	g$(-\frac{1}{3})$=-$\frac{43}{27}$	∪

$-\frac{43}{27}$≈-1,6

punto de inflexión

Análisis completo de una función

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$g(x) = x^3 + x^2 - x - 2$$

Dom $g = (-\infty, \infty)$

Continua en su dominio

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + x^2 - x - 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x^3 + x^2 - x - 2 = \infty$$

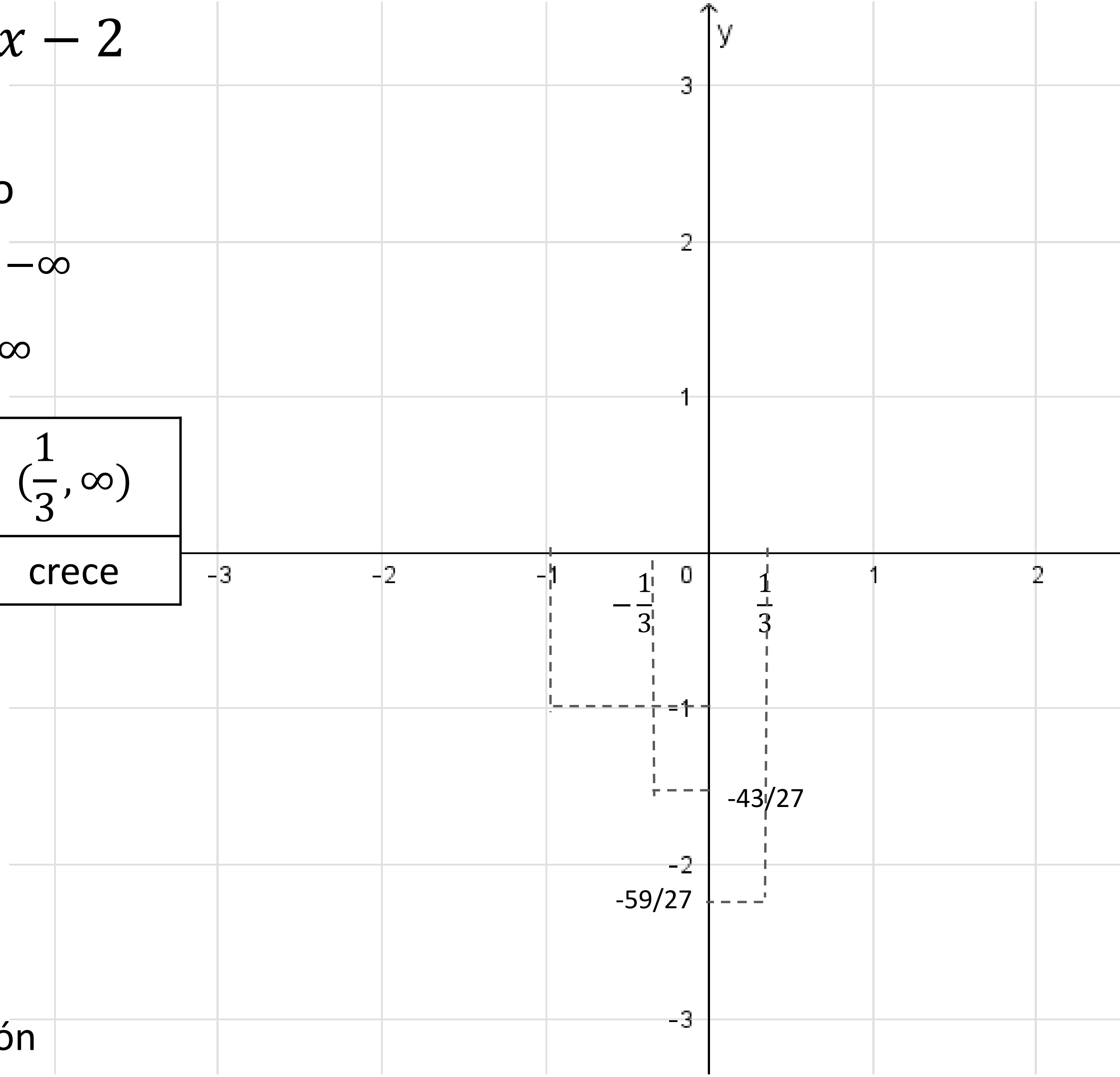
$(-\infty, -1)$	$(-1, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \infty)$
crece	decrece	crece

(-1,-1) Mínimo local

$(\frac{1}{3}, -\frac{59}{27})$ Máximo local

$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, \infty)$
$\cap$	$\cup$

$(-\frac{1}{3}, -\frac{43}{27})$ Punto de inflexión



Análisis completo de una función

$$g(x) = x^3 + x^2 - x - 2$$

Dom $g = (-\infty, \infty)$

Continua en su dominio

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 + x^2 - x - 2 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 + x^2 - x - 2 = \infty$$

$(-\infty, -1)$	$(-1, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \infty)$
crece	decrece	crece

(-1,-1) Mínimo local

$(\frac{1}{3},-\frac{59}{27})$ Máximo local

$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, \infty)$
$\cap$	$\cup$

$(-\frac{1}{3},-\frac{43}{27})$ Punto de inflexión

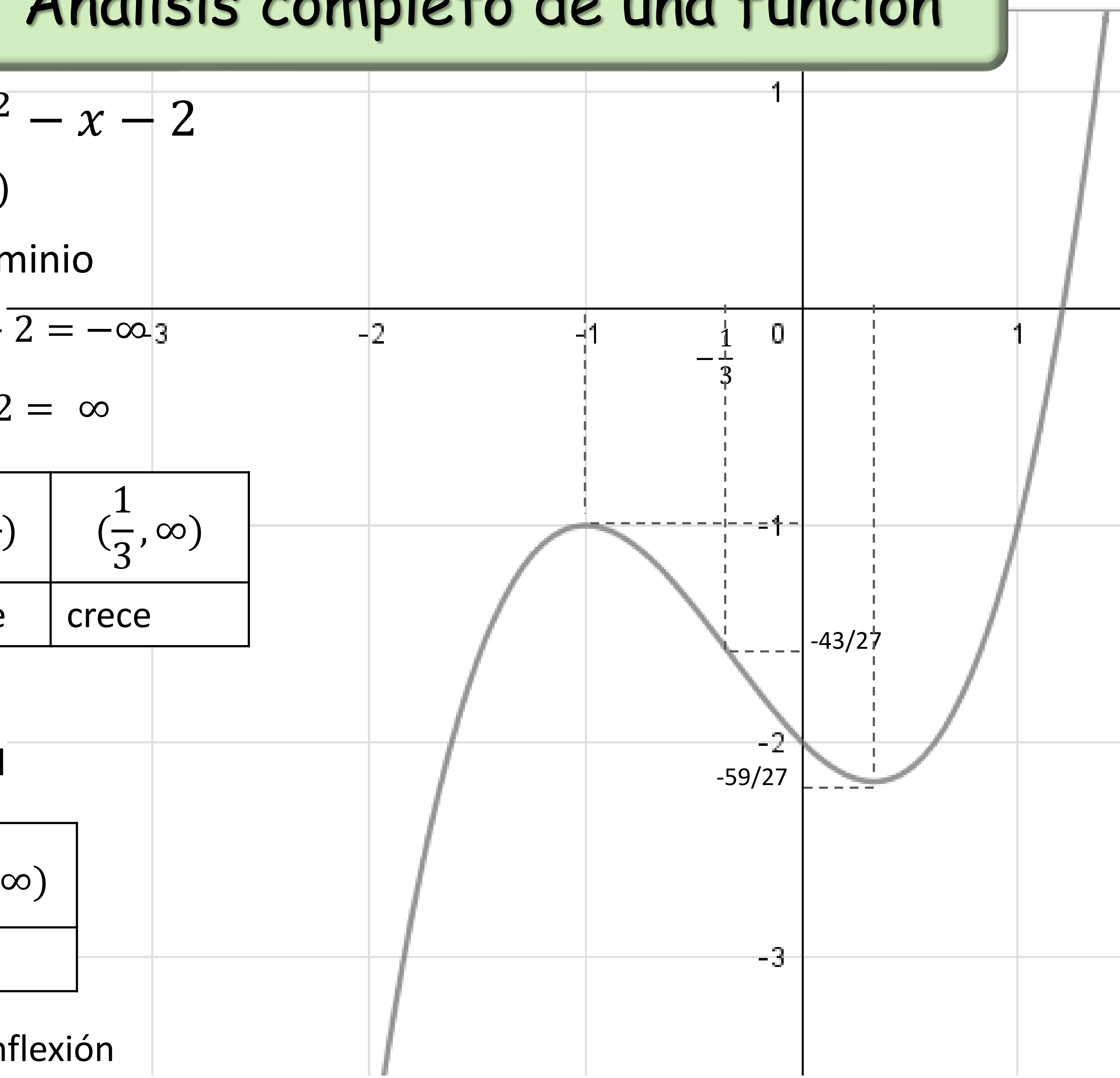


Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Matemática

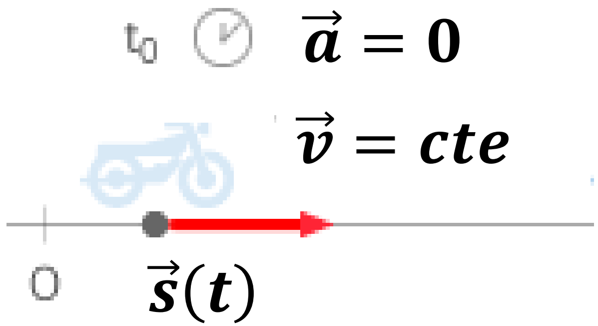
Clase 29 – Martes 24/10

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

Clase	Semana	Tema de la Semana	Práctica
28	16-oct	Tema 13: Aplicaciones de la derivada	Trabajo Práctico N°10: Estudio del crecimiento y concavidad de funciones
29	23-oct	Tema 14: Integrales	Trabajo Práctico N°11: Integrales
30	30-oct	Tema 14: Integrales	Trabajo Práctico N°11: Integrales
31	6-nov	Semana de Repaso	

MRU (Movimiento Rectilíneo Uniforme) → Velocidad constante



$\vec{a} = 0$

$\vec{v} = cte$

$\vec{s}(t)$

En clases previas habíamos visto esto…

$$v(t) = v_o = \text{cte}$$
$$s(t) = v_o \cdot t + s_o$$

MRU

Recordemos un poco lo que conversamos….

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

La integral indefinida

Sea *f(x)* continua en un intervalo $\boldsymbol{I}$. Se define la **integral indefinida o primitiva de** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, y se nota $\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$, a una **nueva función** $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ tal que:

$$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \mathrm{F}(\mathrm{x}) \iff F'(x) = f(x)$$

La ***integral indefinida*** es la **operación inversa de la derivada**

Cálculo de algunas integrales indefinidas…

$$\int 1\, dx = ?$$

$$\int 2x\, dx = ?$$

$$\int 3x^2\, dx = ?$$

$$\int x^3\, dx = ?$$

¿Qué nos preguntamos para calcular estas integrales?

La integral indefinida

Teorema

Sea ***f(x)*** continua en ***I***, y ***F(x)*** su primitiva, entonces ***F(x) + c*** también es primitiva de ***f(x)***, donde ***c*** es cualquier número real.

$$\int \boldsymbol{f(x)dx} = \mathrm{F}(x) \Rightarrow \int \boldsymbol{f(x)dx} = \mathrm{F}(x) + c$$

Toda ***f(x)*** continua tiene infinitas integrales indefinidas.

Cálculo de integrales indefinidas

Repasemos algunas derivadas conocidas para conocer algunas integrales indefinidas

$$(x)' = 1 \quad \Rightarrow \quad \int 1\,dx = x + c$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad \Rightarrow \quad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

Cálculo de integrales indefinidas

Repasemos algunas derivadas conocidas para conocer algunas integrales indefinidas

$$(\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x} \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + c$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

Propiedades de integrales indefinidas

1. $\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \int f(x)\,\mathrm{d}x$, donde k es una constante.

2. $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

Ejemplos:

1. $\int \left(5x + \dfrac{1}{x^4}\right) dx = ?$

2. $\int \dfrac{\sqrt{x} + 2x^5}{x^4}\, dx = ?$

3. $\int 3sen(x)\, dx = ?$

4. $\int \left(2\, e^x + \dfrac{x^5}{3}\right) dx = ?$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Propiedades de integrales indefinidas

NO hay propiedad para

$\int f(x) \cdot g(x) dx$ ni para $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$

Entonces… ¿cómo se calculan las integrales de productos (o divisiones) de funciones?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

- Método de sustitución
- Método de integración por partes
- Método de Fracciones simples
- Uso de identidades trigonométricaS

Se llaman **Métodos de integración**

NOSOTROS NO VAMOS A VER ESTOS MÉTODOS ESTE AÑO

Integrales indefinidas

Ejemplos:

- ✓ Determinar $f(x)$ y $g(x)$ sabiendo que:
  1. Una primitiva de $f(x)$ es $\mathrm{F}(x) = 5cos(x) + 2$.
  2. Una primitiva de $g(x)$ es $\mathrm{G}(x) = x^2 + 2x + 1$.

- ✓ Determinar $h(x)$ si se sabe que su derivada es

  $h'(x) = 2cos(x) - sen(x)$ y que $h(0) = 0$.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Integrales indefinidas

Volvamos a los ejemplos de movimiento rectilíneo de una partícula

Si conocemos la expresión de la velocidad de partícula en función del tiempo… ¿cómo podemos encontrar la correspondiente función de posición?

Integrales indefinidas

Volvamos a los ejemplos de movimiento rectilíneo de un objeto

Si $s(t)$ es la *posición*, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$ la velocidad y $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t})$ la aceleración *del objeto*, entonces:

Como:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{s}'(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{t})$$

$\Rightarrow$

Entonces:

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}) = \int \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\,\mathrm{d}x$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{t})\,\mathrm{d}x$$

Integrales indefinidas

Ejemplo:

✓ Dado un objeto que se mueve sobre una línea recta. Si la siguiente es la gráfica de la velocidad $v(t)$, encontrar la expresión de la posición en función del tiempo, sabiendo que $s(1) = 5{,}5m$

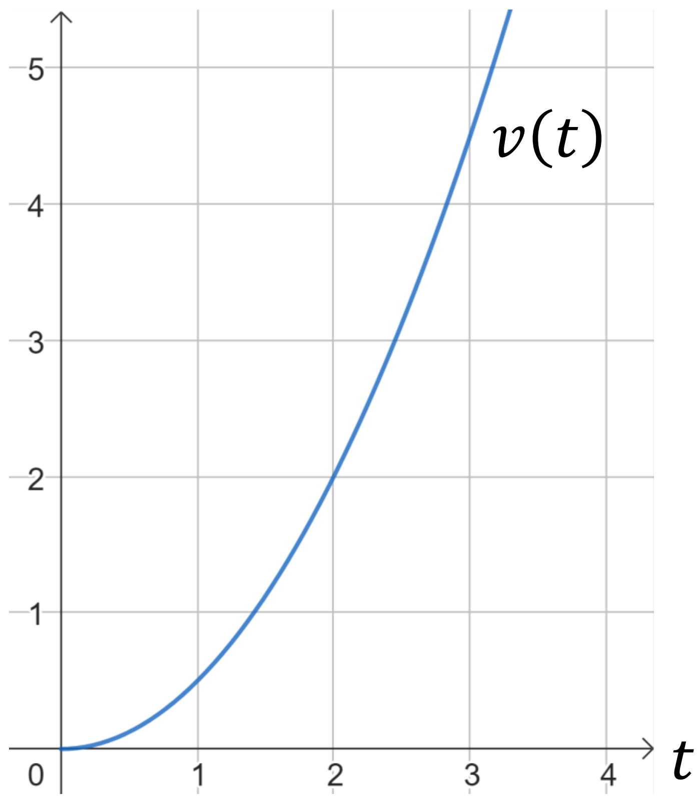


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Matemática

Clase 30 – Martes 31/10

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

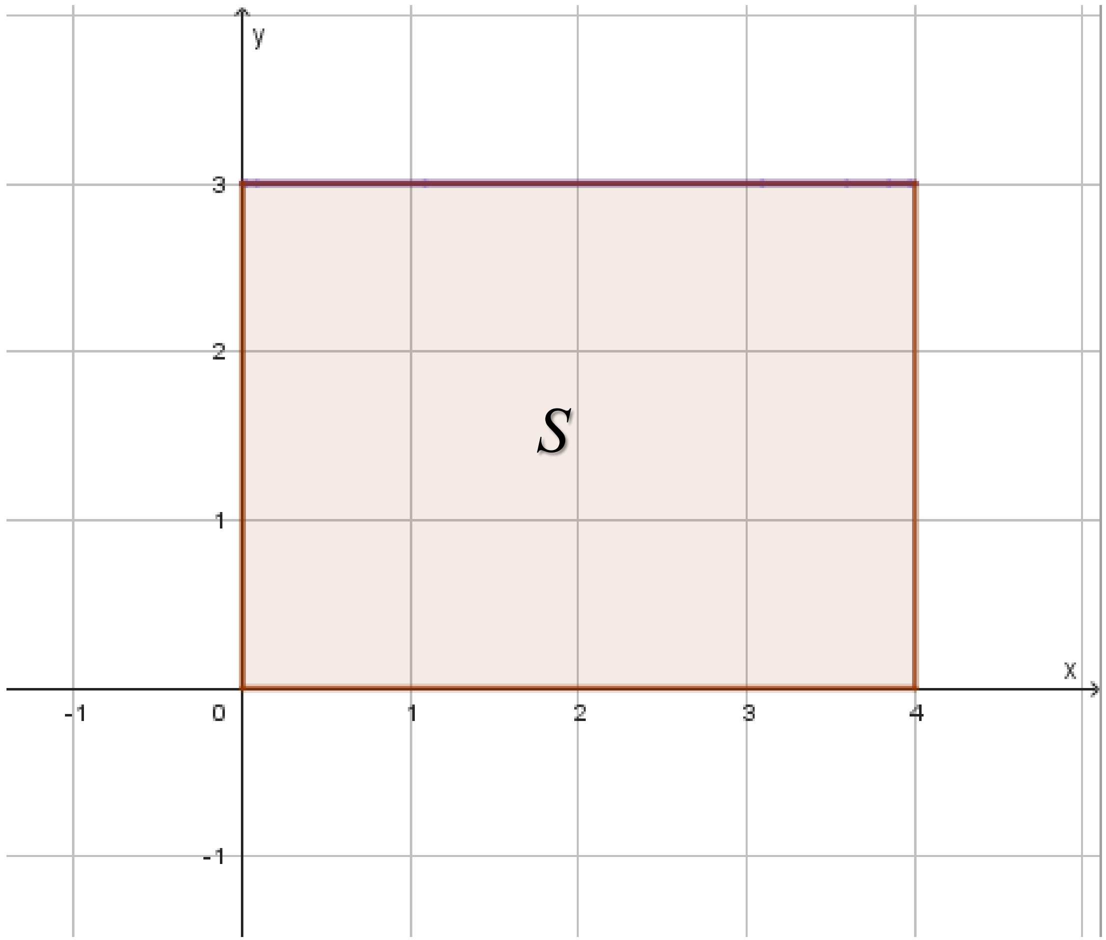
Cronograma

Clase	Semana	Tema de la Semana	Práctica
28	16-oct	Tema 13: Aplicaciones de la derivada	Trabajo Práctico N°10: Estudio del crecimiento y concavidad de funciones
29	23-oct	Tema 14: Integrales	Trabajo Práctico N°11: Integrales
30	30-oct	Tema 14: Integrales	Trabajo Práctico N°11: Integrales
31	6-nov	Semana de Repaso	

Áreas

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

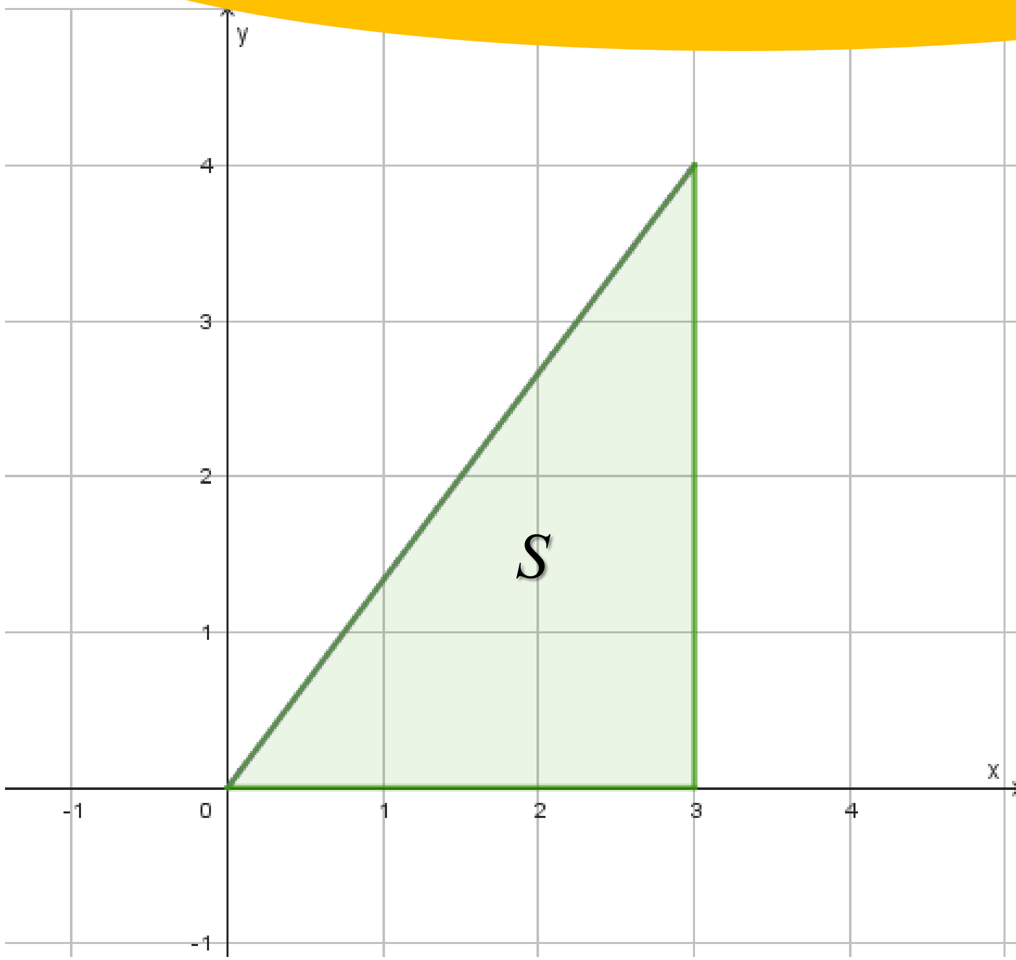
¿Cuánto vale el área de la región sombreada?



Áreas

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

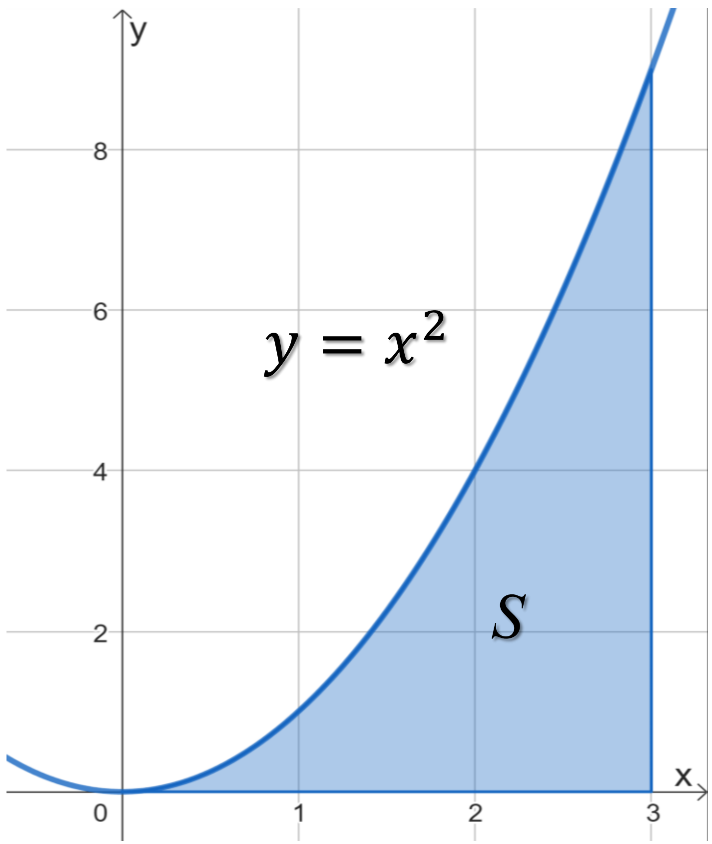
¿Y el área de esta región sombreada?



Áreas

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

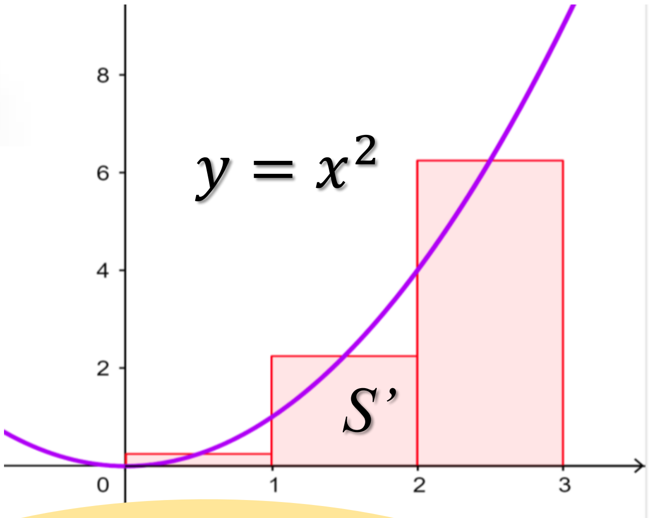
¿Y de esta otra región? ¿cuál es el área?

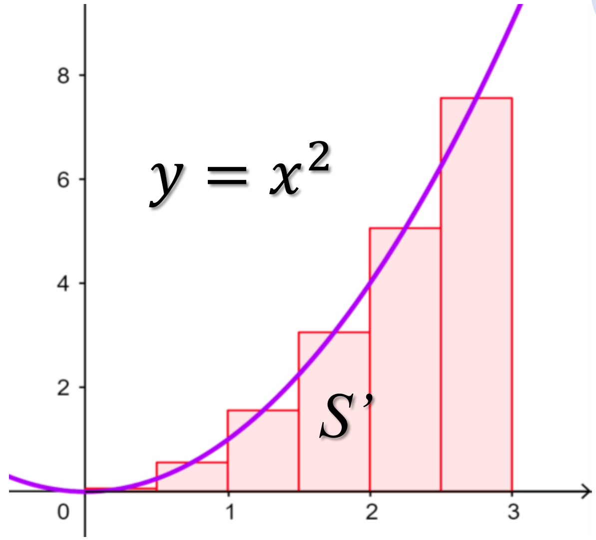


¿Cómo lo hago?

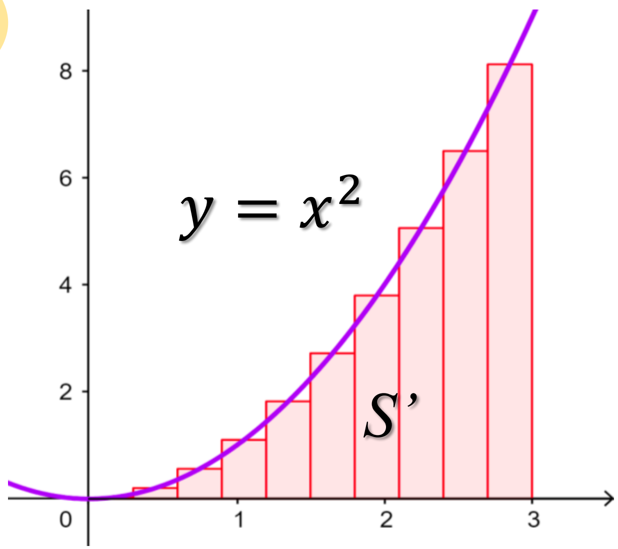
Áreas

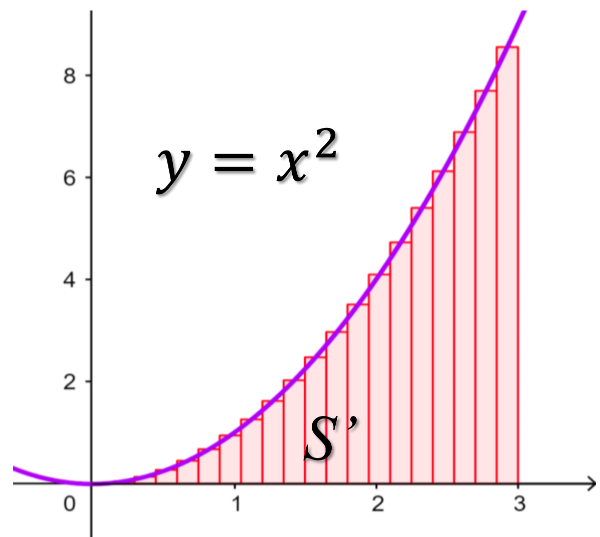
Aproximamos el área calculando áreas de rectángulos…





¿Cuántos rectángulos armamos?



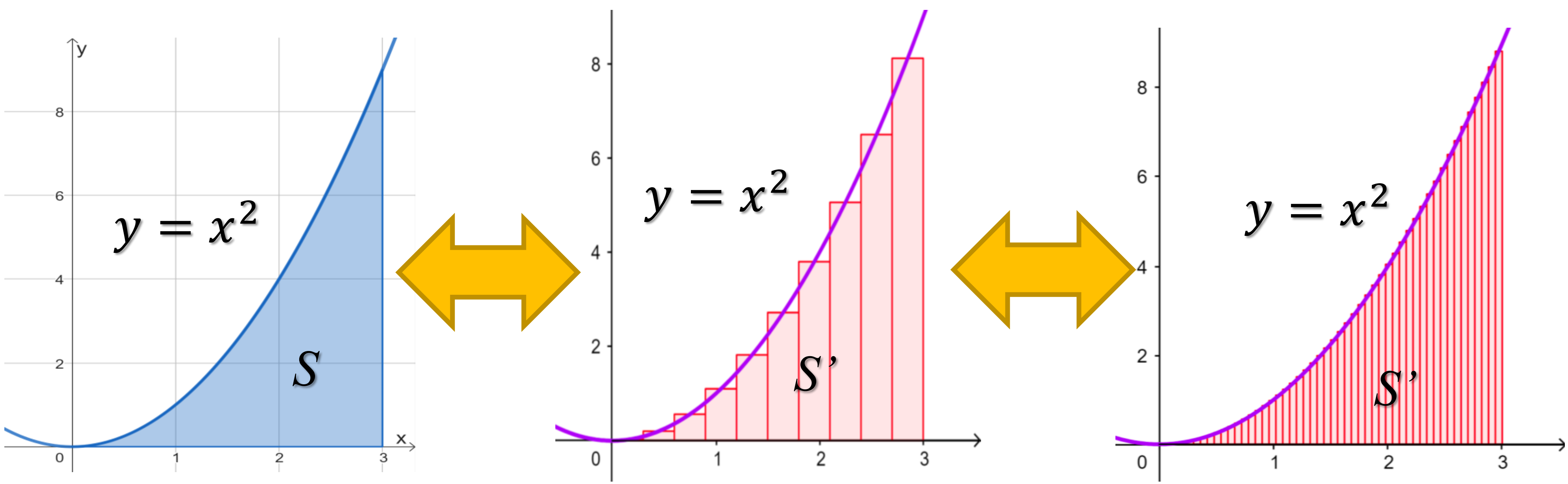


Áreas

Imagen
de 3dman_eu en Pixabay

¡¡¡Cuántos ***más rectángulos arme***, más se va a aproximar la suma de las áreas de los rectángulos al área sombreada!!!

Si hacemos tender la cantidad de rectángulos a $\boldsymbol{infinito}$, la suma de las áreas de los rectángulos tenderá al área bajo la gráfica de la función $f(x) = x^2$.



Áreas

Entonces …

Si f es una **función continua y positiva**. El **área** de la región que se **encuentra debajo de la gráfica** f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos, cuando el número de rectángulos tiende a $\boldsymbol{infinito}$.

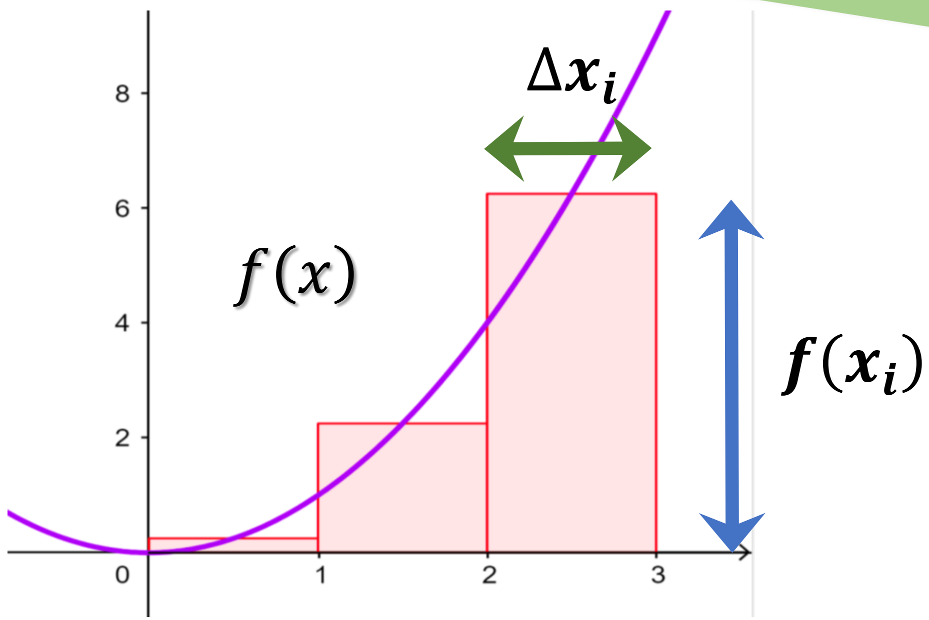


Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Área de la región que está debajo de la curva

$$S = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{f(x_1)\Delta x_1}_{\text{Área de } R_1} + \underbrace{f(x_2)\Delta x_2}_{\text{Área de } R_2} + \cdots + \underbrace{f(x_n)\Delta x_n}_{\text{Área de } R_n}\right]$$

La integral definida

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Formalicemos un poco....

A la suma de *n* términos podemos escribirla así:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n$$

Entonces...

$$S = \boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i} \rightarrow \text{Integral Definida}$$

La integral definida

Definición

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Si f es una función continua definida en un intervalo $[a, b]$, dividimos el intervalo en n subintervalos de igual ancho: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y sean x_i puntos de muestra que pertenecen a cada uno de dichos subintervalos. Entonces **la integral definida de f desde a hasta b** es:

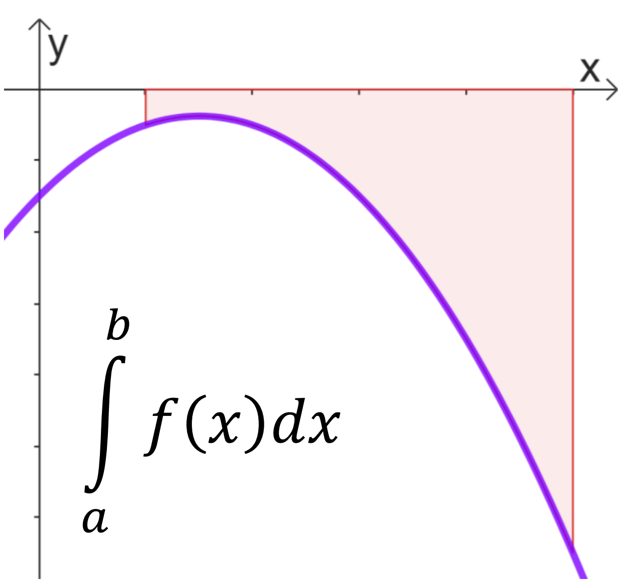
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Siempre que dicho límite exista.

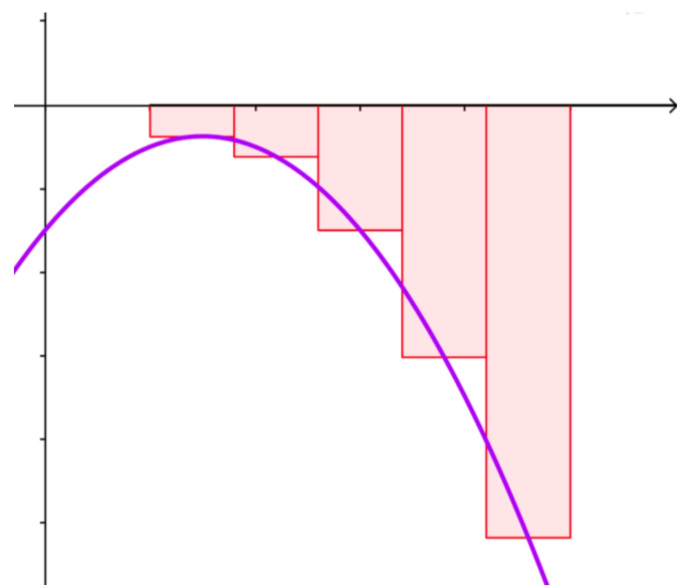
La integral definida & Área

Pero… ¿siempre la *integral definida* da como resultado un área?

Observemos algunas situaciones ….



$$\int_a^b f(x)dx$$



La integral definida & Área

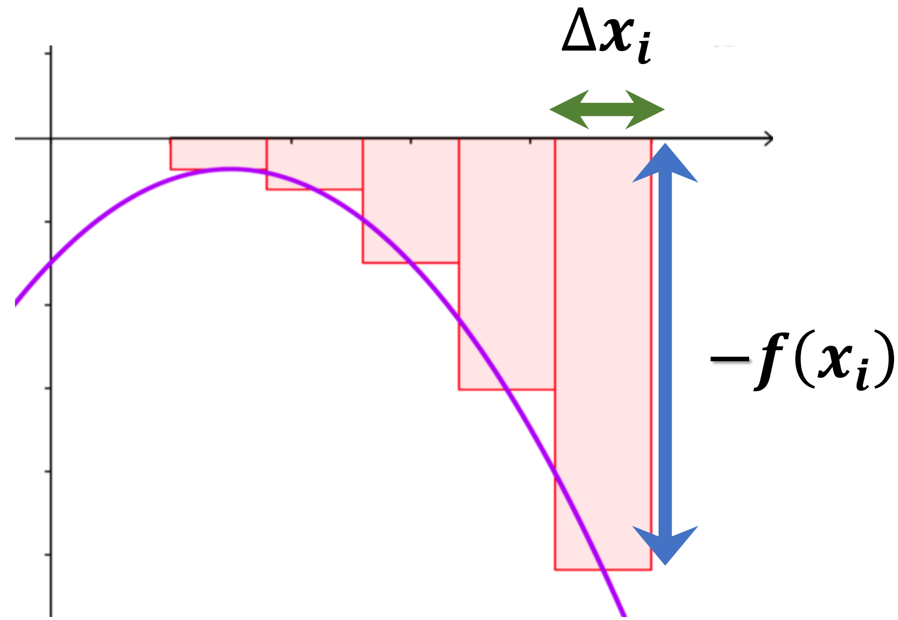
Observemos algunas situaciones ....

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i}$$

Ya NO es el área de R_1

La integral da un NÚMERO NEGATIVO, porque $f(x_i)$ es negativa para todo x_i del intervalo



La integral definida

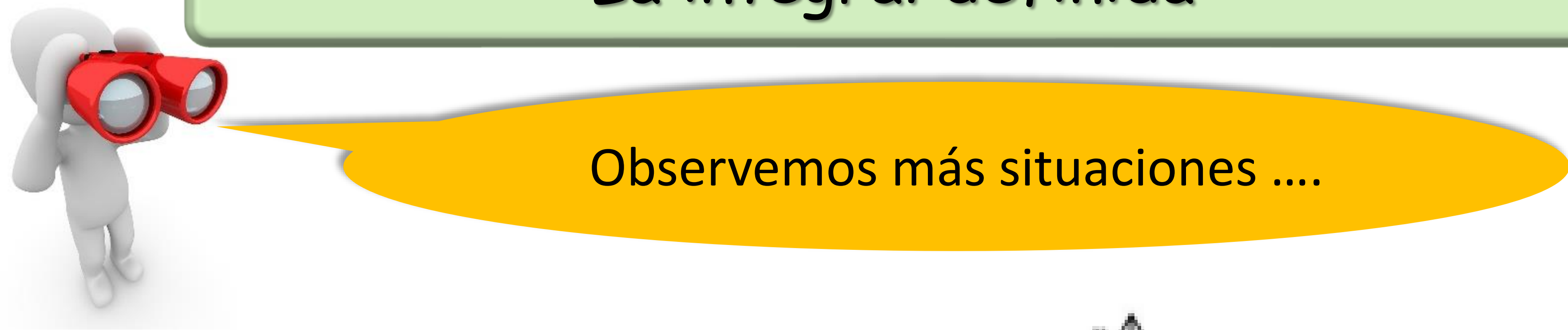
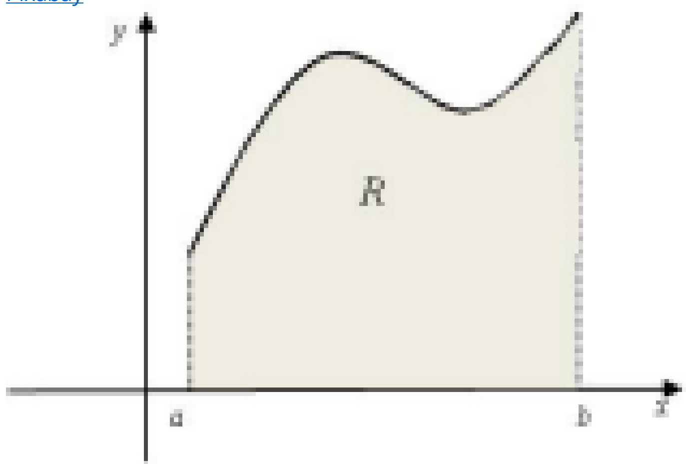
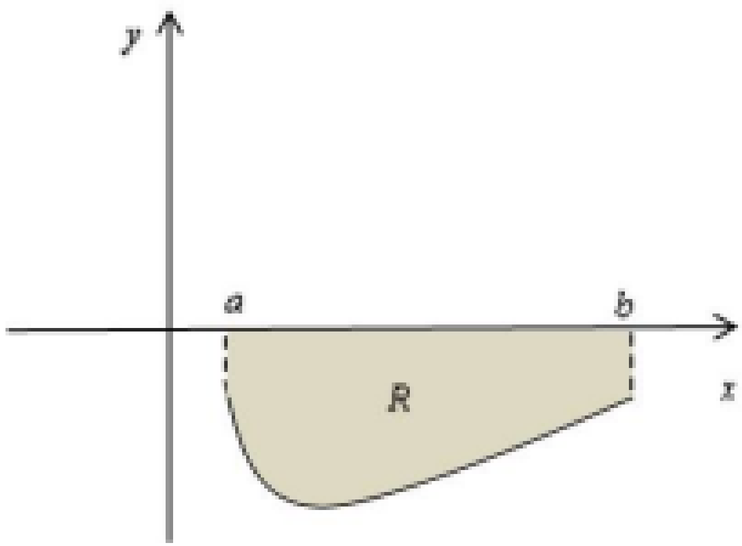


Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay





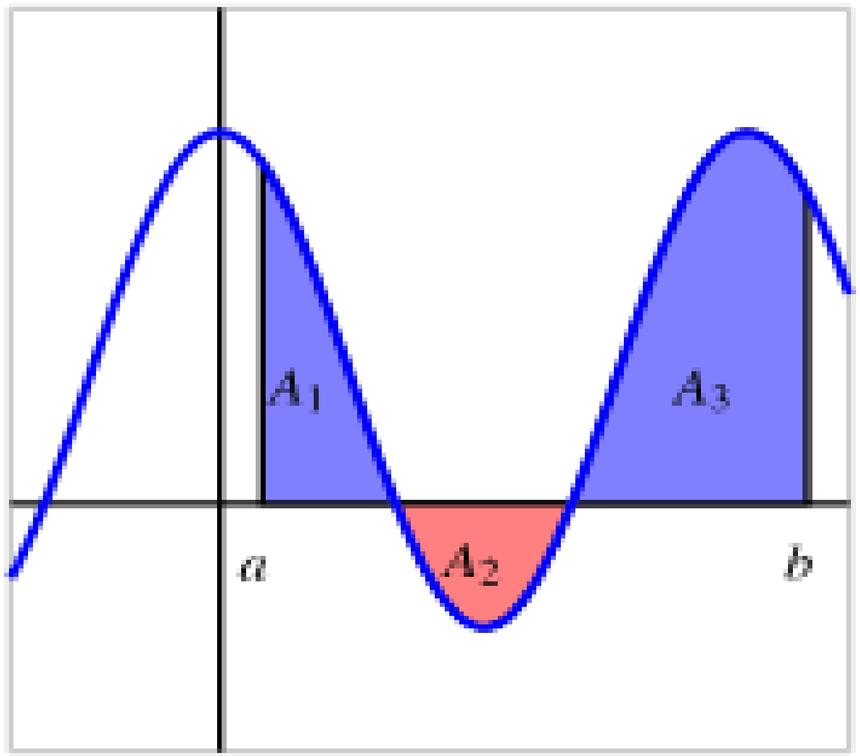
$$\int_a^b f(x)dx = Área(R)$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\,Área(R)$$

La integral definida

Imagen de Peggy Lachmann-Anke

Observemos otra situación ....



$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3$$

Ejemplos

Determinar cada integral interpretándola en términos de áreas, si f es la mostrada en la figura.

a. $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ b. $\int_{0}^{2} f(x)dx$ c. $\int_{1}^{5} f(x)dx$

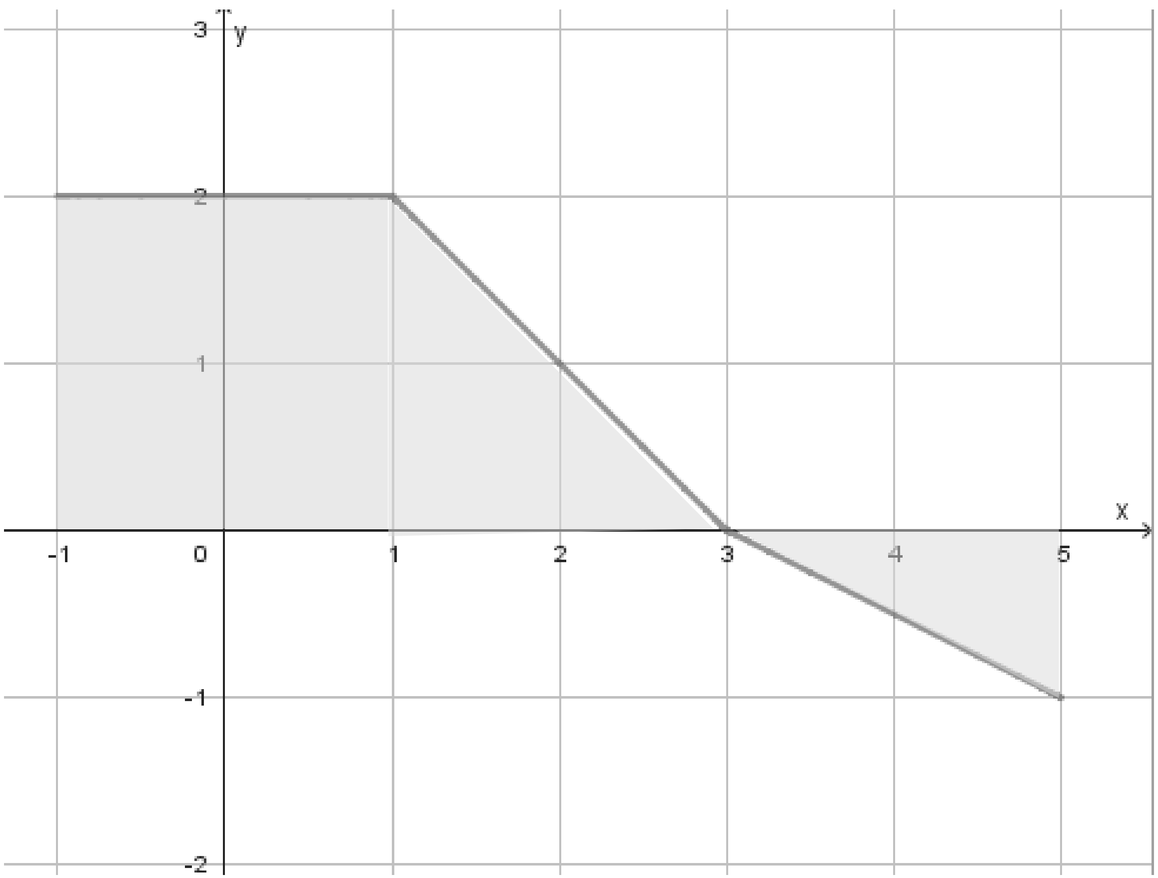
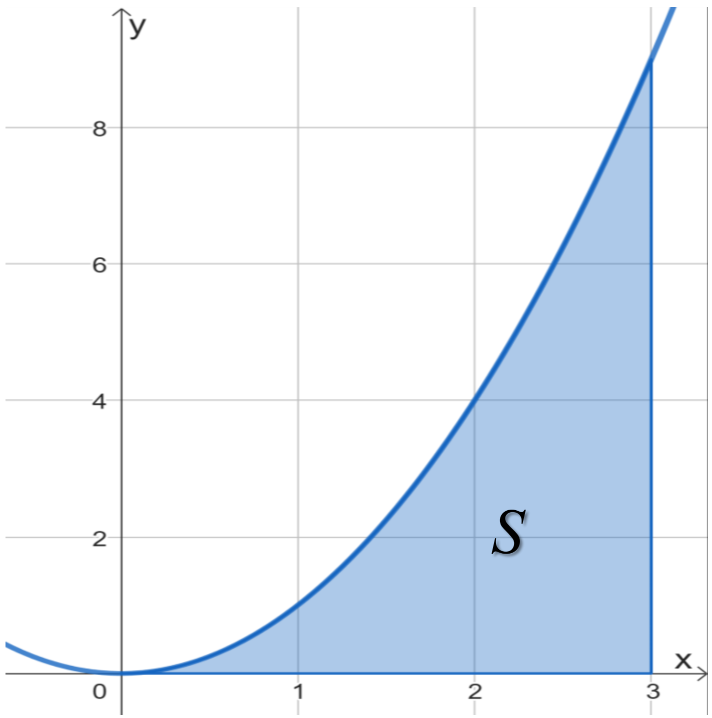


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

La integral definida & Área

Seguimos sin saber cómo calcular el área de la región sombreada

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay



¿Cómo lo hago?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Cálculo de la integral definida

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿Y cómo vamos a hacer el cálculo?

Regla de Barrow

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Si f es una *función continua* definida en un intervalo $[a, b]$, entonces:

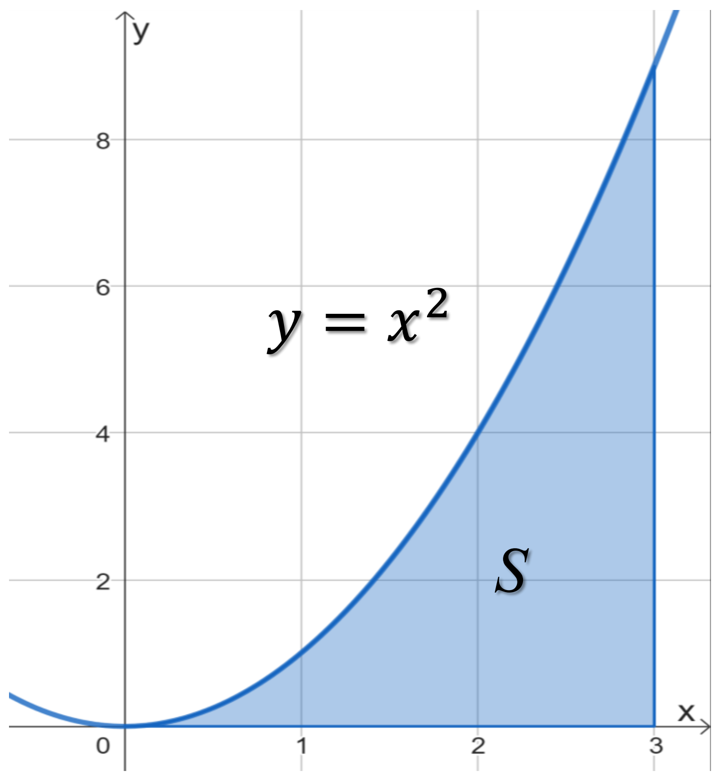
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde $\boldsymbol{F}$ **es la primitiva de** f, es decir, una función tal que $\boldsymbol{F'} = \boldsymbol{f}$.

La integral definida & Área

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡¡Ahora sí!! ¡Utilizamos la Regla de Barrow para calcular el área de la región sombreada!



Ejemplos

Calcular las siguientes integrales:

$$a. \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [1 + sen(x)] \; dx$$

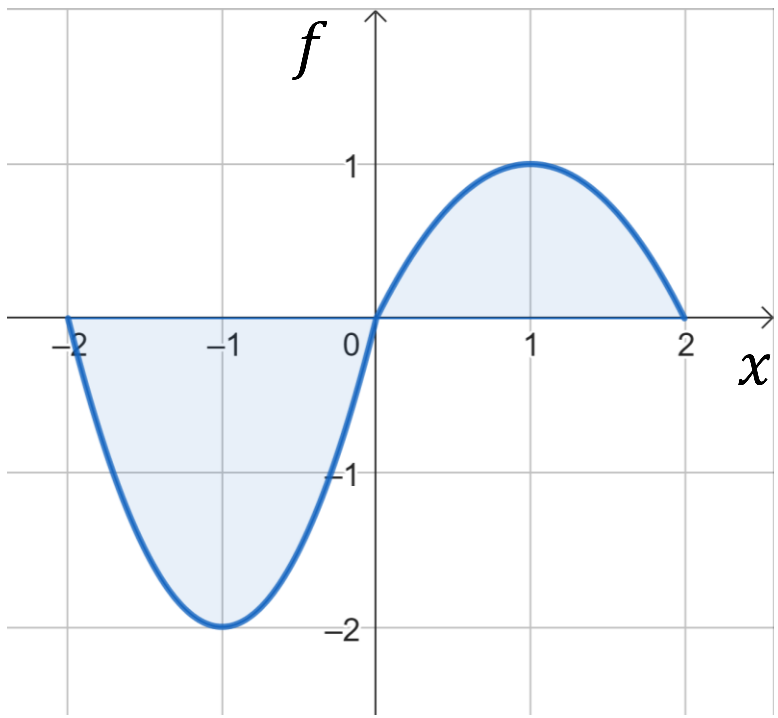
$$b. \int_{1}^{4} \frac{1}{x^3} \; dx$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplos

Determinar el área de la región sombreada, si la curva corresponde a la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x & -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$



La integral entre -2 y 2, ¿nos dará un valor positivo o negativo?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

La integral definida: PROPIEDADES

Se cumplen las dos propiedades vistas para integrales indefinidas:

1. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$, donde k es una constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

¡También se cumplen otras propiedades!

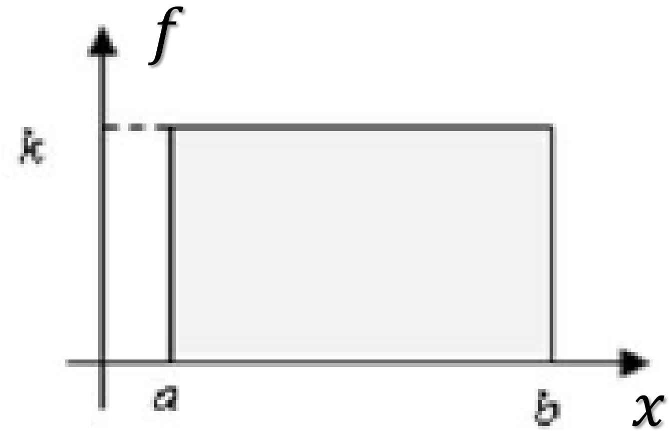
3. $\int_a^a f(x)dx = 0$

4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

La integral definida: PROPIEDADES

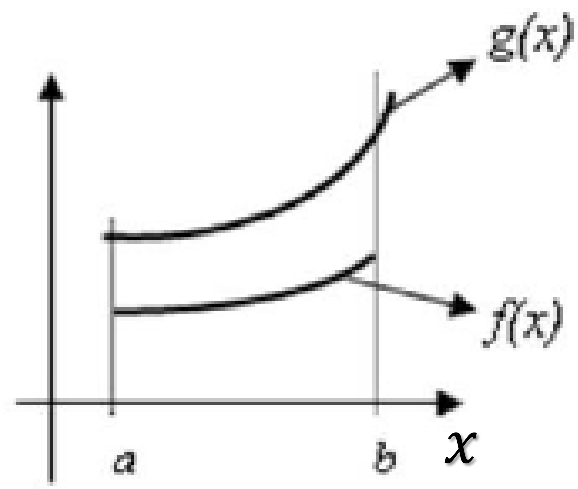
5. Si $k \in \mathcal{R}$ y $f(x) = k \ \forall x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = k(b - a)$$



6. Si $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a, b]$, entonces

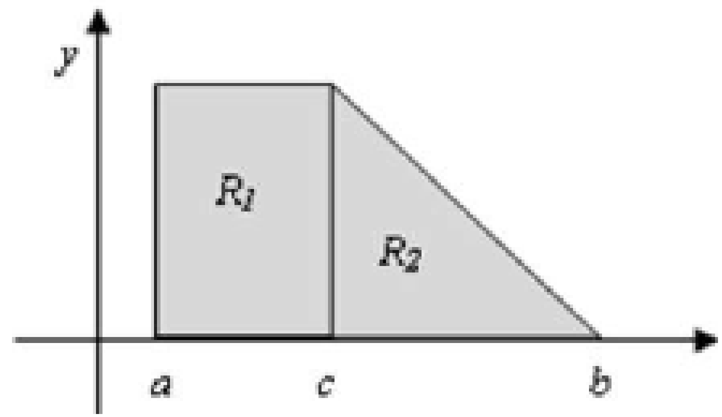
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$



La integral definida: PROPIEDADES

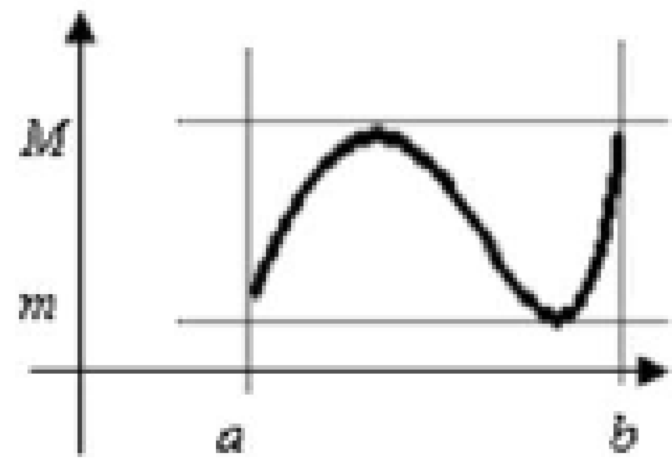
7. Si c es un punto del intervalo (a,b), entonces:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



8. Si $\mathrm{m} \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$, entonces:

$$\mathrm{m(b} - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$



Ejemplos

4. Si se sabe que: $\int_2^5 f(x)dx = -4 \quad y \quad \int_2^5 g(x)dx = 3$ calcular:

$$\int_2^5 [3f(x) - g(x) + x^2]dx =$$

5. Expresar como una sola integral la siguiente expresión:

$$\int_2^5 f(x)dx - \int_2^{-1} f(x)dx =$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

¡¡¡Y así termina el curso de Matemática del 2023!!!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay